Pflichtvorlesung

Grundlagen der Elektrotechnik II

für Studenten

des

2. Semesters

Fachhochschule
Oldenburg Ostfriesland **Wilhelmshaven**

Standort Wilhelmshaven

Fachbereich Elektrotechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Ahlers

Literaturhinweise

Auf dem Gebiet "Grundlagen der Elektrotechnik" gibt es eine Menge brauchbarer Lehrbücher, hier sei nur eines erwähnt:

/1/ Moeller; Fricke; Frohne; Vaske:
Grundlagen der Elektrotechnik
Teubner Verlag, Stuttgart 1986.

Gliederung Grundlagen der Elektrotechnik

1. Semester

1 Einführung

2 Der einfache Gleichstromkreis

3 Berechnung linearer Gleichstromnetze

4 Energie und Leistung bei Gleichstrom

5 Sonderabschnitte

6 Wechselstrom
- 6.1 Einführung
- 6.2 Beschreibung harmonischer Wechselgrößen
- 6.3 Addition harmonischer Größen

2. Semester

- 6.4 Kennwerte von zeitabhängigen Größen
- 6.5 Einfache Schaltungen
- 6.6 Erweiterte Schaltungen
- 6.7 Frequenzabhängigkeit
- 6.8 Lineare Wechselstrom-Netze
- 6.9 Mehrphasen Wechselstrom-Netze
- 6.10 Erzeugung von Wechselstrom

7 Elektrisches Strömungsfeld

8 Elektrostatisches Feld

3. Semester

9 Magnetisches Feld

10 Schaltvorgänge

Gliederung Elektrotechnik II

6. Wechselstrom
- 6.1. Einführung
- 6.2. Beschreibung harmonischer Wechselgrößen
- 6.3. Addition harmonischer Größen
- 6.4. Kennwerte von zeitabhängigen Größen
- 6.5. Einfache Schaltungen
- 6.6. Erweiterte Schaltungen
- 6.7. Frequenzabhängigkeit
- 6.8. Lineare Wechselstrom-Netze
- 6.9. Drehstrom
- 6.10. Erzeugung von Wechselstrom

7. Elektrisches Strömungsfeld
- 7.1. Feldbegriffe
- 7.2. Feldarten in der Elektrotechnik
- 7.3. Stromdichte und Strom
- 7.4. Potential und Feldstärke
- 7.5. Ursache der elektrischen Strömung in Leitern
- 7.6. Ohmsches Gesetz in Elementarform
- 7.7. Leistungsdichte im Strömungsfeld
- 7.8. Feldlinien und Äquipotentiallinien
- 7.9. Berechnung des elektrischen Widerstandes
- 7.10. Verhalten an Grenzflächen

8. Das elektrostatische Feld
- 8.1. Ursache des elektrostatischen Feldes
- 8.2. Kraft auf eine Ladung
- 8.3. Zusammenwirken zweier Ladungen
- 8.4. Ladungsarten
- 8.5. Verschiebungsfluß und Verschiebungsflußdichte
- 8.6. Zusammenhang zwischen D und E
- 8.7. Der Begriff der Kapazität
- 8.8. Schaltung von Kondensatoren
- 8.9. Berechnung von Kondensatoren

Inhaltsverzeichnis Grundlagen der Elektrotechnik II

6. Wechselstrom 1
6.1. Einführung 1
6.1.1. Einteilung zeitabhängiger Größen 1
6.1.2. Allgemeine periodische Verläufe 4
6.2. Beschreibung harmonischer Wechselgrößen 5
6.2.1. Beschreibung in Zeitbereich 6
6.2.2. Rotierender Scheitelwertzeiger 10
6.2.3. Ruhender Scheitelwertzeiger 12
6.2.4. Effektivwertzeiger 14
6.2.5. Zusammenfassung: Beschreibung harmonischer Größen 16
6.3. Addition harmonischer Größen 18
6.3.1. Addition im Zeitbereich 18
6.3.2. Komplexe Addition harmonischer Schwingungen 20
6.3.3. Wiederholung komplexe Rechnung 21
6.3.3.1. Definitionen 21
6.3.3.2. Gauß'sche Zahlenebene 21
6.3.3.3. Euler Formel 21
6.3.3.4. Umwandlung von kartesischen Koordinaten in Polar-Koordinaten 21
6.3.3.5. Umwandlung von Polar-Koordinaten in kartesischen Koordinaten 21
6.3.3.6. Konjungiert komplexe Zahl 22
6.3.3.7. Potenzen von j 22
6.3.3.8. Addition komplexer Zahlen 23
6.3.3.9. Subtraktion komplexer Zahlen 23
6.3.3.10. Inversion einer komplexen Zahl 24
6.3.3.11. Multiplikation komplexer Zahlen 24
6.3.3.12. Division komplexer Zahlen 25
6.3.3.13. Multiplikation einer komplexen Zahl mit Potenzen von j 25
6.3.3.14. Potenzen einer komplexen Zahl 26
6.3.3.15. m-te Wurzel aus einer komplexen Zahl 26
6.3.3.16. Welche Operation in welcher Form 27
6.3.3.17. Logarithmus aus einer komplexen Zahl 27
6.3.3.18. Gleichheit komplexer Zahlen 27
6.3.3.19. Differentiation nach dem Winkel 28
6.3.3.20. Integration nach dem Winkel 28
6.3.3.21. Schreibweise komplexer Zahlen 28
6.4. Kennwerte von zeitabhängigen Größen 29
6.4.1. Arithmetischer Mittelwert 29
6.4.2. Quadratischer Mittelwert 31
6.4.3. Gleichrichtwert 34
6.4.4. Formfaktor 35
6.4.5. Kennwerte von nicht harmonischen Wechselgrößen 35
6.4.5.1. Arithmetischer Mittelwert 35
6.4.5.2. Quadratischer Mittelwert 36
6.4.5.3. Grundschwingungsgehalt 37
6.4.5.4. Klirrfaktor 37
6.4.5.5. Zahlenwerte für spezielle Formen 37
6.4.5.6. Scheitelwert 37
6.5. Einfache Schaltungen 38
6.5.1. Widerstand R 38
6.5.1.1. Zeitbereich 38
6.5.1.2. Komplexe Behandlung 39
6.5.1.3. Leistung 40
6.5.1.4. Grafische Darstellung der Größen 40
6.5.2. Induktivität L 42
6.5.2.1. Zeitbereich 42
6.5.2.2. Komplexe Behandlung 43

6.5.2.3. Leistung 44
6.5.2.4. Grafische Darstellung der Größen 44
6.5.3. Kapazität C 46
6.5.3.1. Zeitbereich 46
6.5.3.2. Komplexe Behandlung 47
6.5.3.3. Leistung 47
6.5.3.4. Grafische Darstellung der Größen 48
6.5.4. Phasenverschiebung 50
6.5.5. Kirchhoffsche Gesetze bei Wechselstrom 52
6.5.6. Komplexe Behandlung von Spannungsquellen 53
6.5.7. Reihenschaltung R-L 53
6.5.8. Reihenschaltung R-C 56
6.5.9. Parallelschaltung R-C 59
6.5.10. Komplexes ohmsches Gesetz, komplexer Widerstand und Leitwert 62
6.5.11. Leistung 64
6.5.11.1. Definition Leistung an R, L und C 64
6.5.11.2. Leistung im Zeitbereich 65
6.5.11.3. Komplexe Leistung 66
6.5.11.4. Beispiel 67
6.6. Erweiterte Schaltungen 69
6.6.1. Spannungsteiler 69
6.6.2. Stromteiler 70
6.6.3. Wechselstrombrücken 71
6.6.3.1. Komplexe Abgleichbedingung 71
6.6.3.2. Messung einer realen Kapazität 72
6.6.3.3. Messung einer realen Induktivität 73
6.6.4. Blindstromkompensation 74
6.6.5. Leistungsanpassung 76
6.6.5.1. Wirkleistungsanpassung 77
6.6.5.2. Scheinleistungsanpassung 78
6.6.5.3. Leistungsanpassung an einem ohmschen Widerstand 78
6.6.6. Umwandlung Reihenschaltung <=> Parallelschaltung 79
6.7. Frequenzabhängigkeit 80
6.7.1. Frequenzgang und Übertragungsfunktion 81
6.7.1.1. Frequenzgang 81
6.7.1.2. Übertragungsfunktion 82
6.7.2. Logarithmisches Übertragungsmaß 84
6.7.3. Darstellung nach Betrag und Phase 85
6.7.3.1. Lineare Darstellung 85
6.7.3.2. Logarithmische Darstellung 88
6.7.3.2.1. Grundlagen der logarithmischen Darstellung 88
6.7.3.3. Anwendung der logarithmischen Darstellung 91
6.7.4. Ortskurven 94
6.7.4.1. Wiederholung: Mathematische Grundlagen der Ortskurve 94
6.7.4.2. Physikalische Ortskurven 99
6.7.5. Filter 104
6.7.5.1. Einteilung 104
6.7.5.2. Grenzfrequenz und Bandbreite 105
6.7.5.3. Bode-Diagramm 106
6.7.5.4. Tiefpaß 1.Ordnung 107
6.7.5.5. Hochpaß 1.Ordnung 111
6.7.5.6. Bandpaß 114
6.7.5.7. Tiefpaß 2.Ordnung 116
6.7.6. Schwingkreise 119
6.7.6.1. Freie Schwingungen 119
6.7.6.2. Erzwungene Schwingungen 121
6.7.6.3. Reihenschwingkreis 121
6.7.6.4. Parallelschwingkreis 129
6.7.6.5. Vergleich: Reihen- und Parallelschwingkreis 130
6.8. Lineare Wechselstrom-Netze 131

6.8.1. Einleitung 131
6.8.1.1. Unterschied: Gleichstrom- Wechselstromrechnung 131
6.8.2. Komplexe Tips für den Taschenrechner 132
6.8.3. Komplexe Gleichungssysteme 133
6.8.4. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze 136
6.8.5. Komplexes Maschenstrom-Verfahren 137
6.8.6. Komplexes Maschenstrom Verfahren für Rechner 139
6.8.7. Dreieck-Stern und Stern-Dreieck-Umwandlung 142
6.8.8. Quellen-Umwandlung 143
6.8.9. Überlagerungsprinzip 144
6.8.10. Ersatzquellen 145
6.8.11. Komplexes Knotenpunkt-Potential-Verfahren 147
6.8.12. Komplexes Knotenpunkt-Potential-Verfahren für Rechner 149
6.9. Drehstrom 153
6.9.1. Mehrphasen-Wechselströme 153
6.9.2. Schaltungen der Quelle 154
6.9.2.1. Sternschaltung 154
6.9.2.2. Dreieckschaltung 157
6.9.3. Schaltungen der Verbraucher 158
6.9.3.1. Symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter 158
6.9.3.2. Symmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter 161
6.9.3.3. Symmetrische Dreieckschaltung 161
6.9.3.4. Unsymmetrische Dreieckschaltung 164
6.9.3.5. Unsymmetrische Sternschaltung mit Nulleiter 166
6.9.3.6. Unsymmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter 168
6.9.4. Rechts- und linksdrehendes Drehstromsystem 170
6.9.5. Leistungsmessung bei Drehstrom 172
6.9.5.1. Ein-Wattmeter-Methode 172
6.9.5.2. Drei-Wattmeter-Methode 173
6.9.5.3. Zwei-Wattmeter-Methode (Aron Schaltung) 174
6.9.6. Drehfaktor 175
6.9.7. Symmetrische Komponenten 176
6.10. Erzeugung von Wechselstrom 177

7. Elektrisches Strömungsfeld 178
7.1. Feldbegriffe 178
7.2. Feldarten in der Elektrotechnik 181
7.3. Stromdichte und Strom 182
7.4. Potential und Feldstärke 183
7.5. Ursache der elektrischen Strömung in Leitern 186
7.6. Ohmsches Gesetz in Elementarform 187
7.7. Leistungsdichte im Strömungsfeld 187
7.8. Feldlinien und Äquipotentiallinien 188
7.9. Berechnung des elektrischen Widerstandes 189
7.9.1. Analytische Methode 189
7.9.2. Grafische Methode 189
7.10. Verhalten an Grenzflächen 190

8. Das elektrostatische Feld 191
8.1. Ursache des elektrostatischen Feldes 191
8.2. Kraft auf eine Ladung 193
8.3. Zusammenwirken zweier Ladungen 194
8.4. Ladungsarten 195
8.5. Verschiebungsfluß und Verschiebungsflußdichte 196
8.6. Zusammenhang zwischen und 197
8.7. Der Begriff der Kapazität 200
8.8. Schaltung von Kondensatoren 201
8.9.1. Plattenkondensator 202
8.9.2. Analytische Kapazitäts-Berechnung 202
8.9.3. Konzentrischer Zylinder-Kondensator 202
8.9.4. Konzentrischer Kugelkondensator 204

8.9.5. Wickelkondensator 204
8.9.6. Feld und Kapazität einer Doppelleitung 204
8.9.6.1. Feld einer Einzelleitung 204
8.9.6.2. Feld einer Doppelleitung auf der Verbindungslinie 205
8.9.6.3. Kapazität einer Doppelleitung 206
8.9.6.4. Potential der Doppelleitung 207
8.9.7. Kapazität einer Leitung gegen Erde 208
8.10. Kraft zwischen zwei Ladungen 209
8.11. Influenz, Faradayischer Käfig 210
8.12. Energie des elektrischen Feldes 211
8.13. Entladen eines Kondensators 212
8.14. Verluste im elektrostatischen Feld 213
8.14.1. Isolations-Verluste 213
8.14.2. Dielektrische Verluste 214
8.15. Spannungsverteilung an einer Reihenschaltung 215
8.16. Kraft auf Kondensatorplatten 216
8.17. Verallgemeinert Stromdichte 217
8.18. Ohmsches und Kirchhoffsche Gesetze in Elementarform 218
8.19. Verhalten an Grenzflächen 220

Anhang 221
Aufgaben 221
Ergebnisse 235

6. Wechselstrom

6.1. Einführung

Warum ist Wechselstrom wichtig?

- In der Energietechnik werden über 99 % der elektrischen Energie als Wechselstrom erzeugt und verteilt.
- Auch in der Nachrichtentechnik spielt der Wechselstrom eine wichtige Rolle. Z.B. werden bei Radio und Fernsehen, Nachrichten analog mit Hilfe von Wechselstrom transportiert.

Warum ist im 1. Semester der Gleichstrom so intensiv behandelt worden?

1. Weil das Verständnis der Elektrotechnik am einfachsten mit Gleichstrom zu erklären ist.
2. Weil alle Methoden der Gleichstrom-Berechnung auch unter Anwendung der komplexen Rechnung auf die Wechselstromrechnung übertragen werden können.

6.1.1. Einteilung zeitabhängiger Größen

Um wechselstromförmige Größen zu klassifizieren, wird erst einmal ein Überblick über zeitabhängige Größen gegeben.

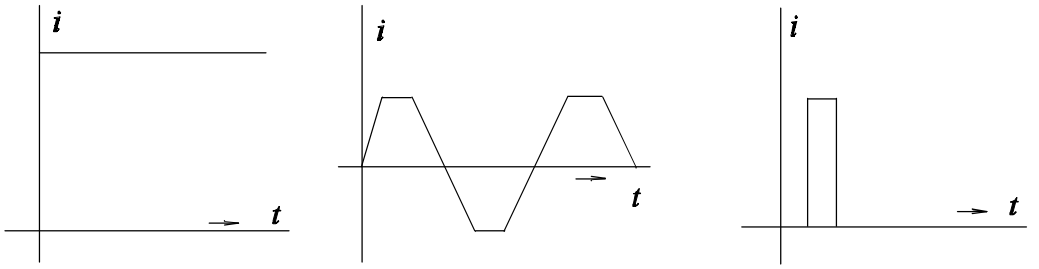


Bild EG611A: Beispiel für die Art von Zeitvorgängen

Nach Bild EG611A kann man je nach Zeitverlauf einteilen in:

A] Gleichstrom

Aus dem 1. Semester bekannt, Strom fließt immer, keine Zeitabhängigkeit f(t) = const.

B] Periodische Vorgänge

Ein allgemeiner periodischer Vorgang ist in Bild EG61A B] dargestellt. Auch eine Sinus-Funktion ist ein periodischer Vorgang. Der Zusammenhang zwischen allgemein periodischen Vorgängen und sinusförmigen Größen soll in Abschnitt 6.1.2. behandelt werden.

C] Einmalige Vorgänge

Einmalige Vorgänge entstehen durch impulsförmige Anregung oder auch bei Einschaltvorgängen. Berechnungsmethoden werden erst im 3.Semester angegeben.

Beispiel 1: Einmaliger Vorgang :

Einschalten R-C-Reihenschaltung

ohne Ableitung: $i(t) = \frac{U_q}{R} * e^{-t/(RC)}$

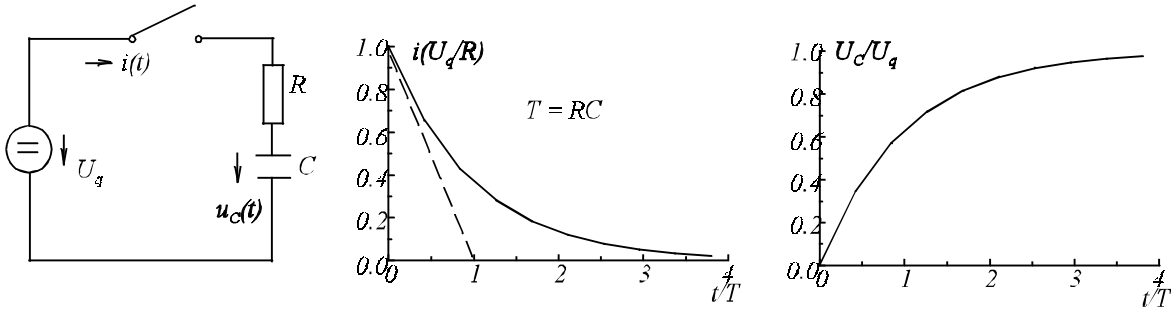


Bild EG611B

Die in Bild EG611A dargestellten Formen können sich auch überlagern, es ergeben sich sogenannte Mischformen, siehe Beispiele 2 und 3.

Beispiel 2: Gleichstrom I_g überlagert mit einem periodischen Vorgang

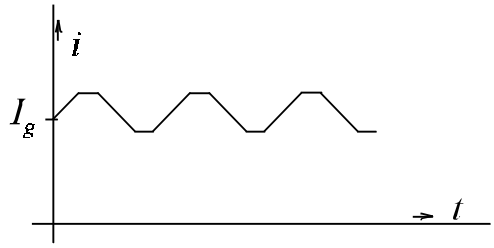


Bild EB61C

Beispiel 3: Einschalten einer AC-Quelle an R-L-Reihenschaltung.

Mischform: einmaliger Vorgang überlagert mit periodischem Vorgang

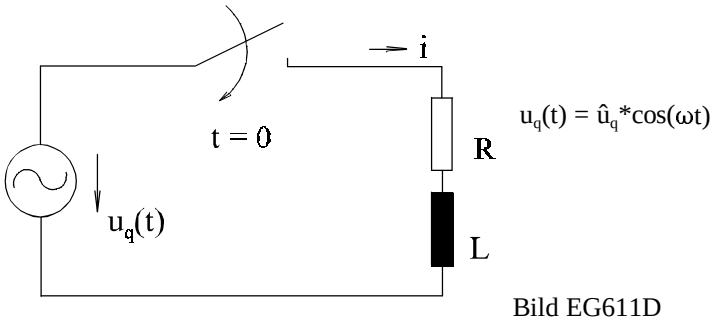


Bild EG611D

Ableitung 3. Semester

mit $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

ergibt sich

$$i(t) = \frac{\hat{u}_q}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} * \left\{\cos(\omega t - \varphi) - e^{-t/(L/R)} * \cos(\varphi)\right\}$$

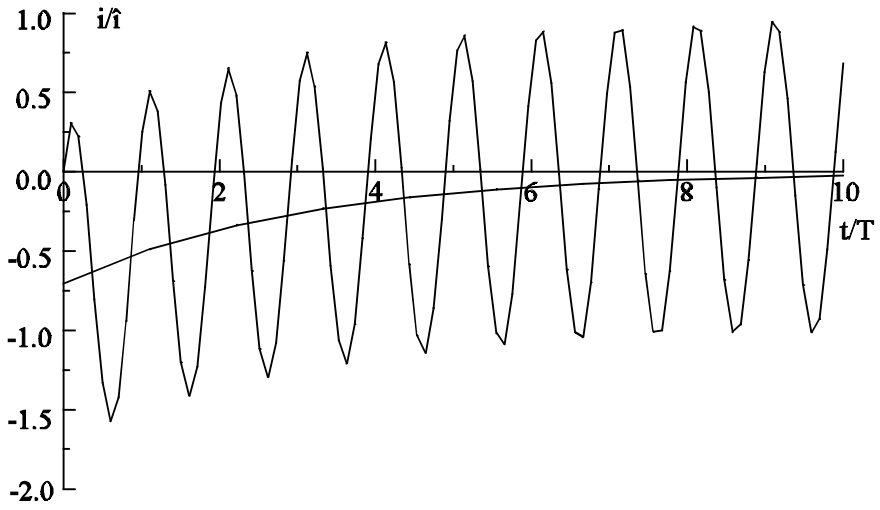


Bild EG611E

Ergebnis: Schwingung um einen abklingenden Mittelwert

In diesem Semester soll im Kap. 6 (Wechselstrom) nur der eingeschwungene Zustand handelt werden ($t \rightarrow \infty$). Übergangsvorgänge sind abgeklungen und werden hier nicht betrachtet (erst wieder im 3.Semester).

6.1.2. Allgemeine periodische Verläufe

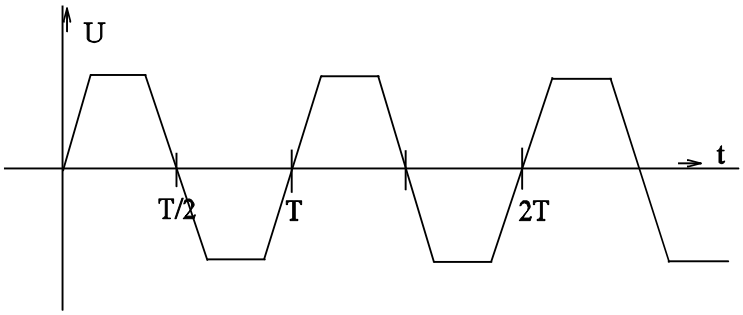


Bild EG612A

Bevor sinusförmige Verläufe betrachtet werden sollen, erfolgt erst einmal die Vorstellung allgemeiner periodischer Vorgänge. Die einzigste Bedingung hier ist, daß sich der Zeitverlauf nach der Periodendauer T wiederholt.

$$f(t) = f(t + nT)$$

Vorgriff auf das 3. Semester Mathematik: Jede periodische Funktion läßt sich als eine Summe von trigonametrischen Funktionen darstellen.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k * \cos(kx) + b_k * \sin(kx)]$$

Beispiel:

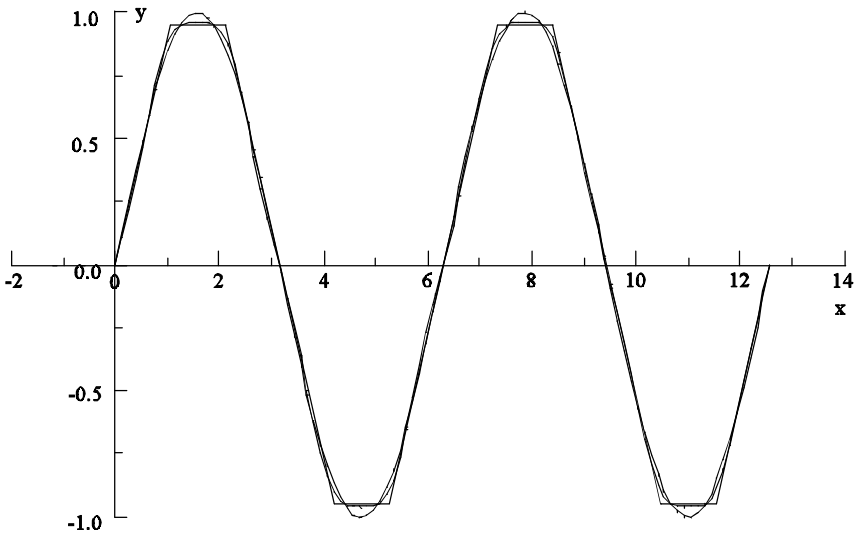


Bild EG612B: Trapezfunktion mit der Periode in x von 2π

In Bild EG612B ist die Trapez-Funktion f(x), die sich aus Geraden zusammensetzt, durch eine Summe von Sinusfunktionen angenähert worden.

$$f_1(x) = \sin(x)$$

$$f_2(x) = \sin(x) - \frac{1}{25}\sin(5x)$$

Man sieht, daß bei Berücksichtigung der fünften Oberschwingung schon gute Ergebnisse erzielt werden.

Wann rechnet man mit Oberschwingungen? In diesem Semester soll nicht mit Oberschwingungen gerechnet werden, sondern nur mit sinusförmigen Größen, weil die Grundbegriffe der Wechselstromrechnung vorgestellt werden. Nur noch ein Hinweis zu allgemein periodischen Vorgängen. Aus dem ersten Semester ist das Überlagerungsprinzip bekannt. Bei einer nicht sinusförmigen periodischen Anregung (Spannungsquelle) und einem linearen Netzwerk lassen sich die Wirkungen der Grund- und Oberschwingungen einzeln berechnen und zum Schluß überlagern.

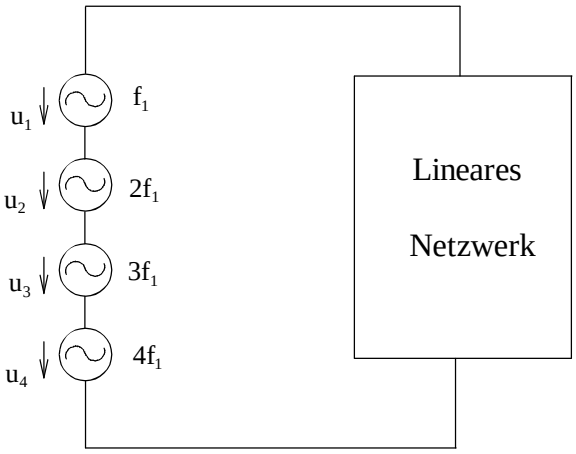


Bild EB612C

6.2. Beschreibung harmonischer Wechselgrößen

Was ist eine harmonische Wechselgröße?

Definition: Eine harmonische Wechselgröße ist eine periodische Funktion einer Frequenz.

Spezielle Funktionen: Kosinus Funktion
Sinus Funktion

Allgemeine Funktion: Kosinus (oder Sinus) Funktion in t verschoben und in y gestreckt.

6.2.1. Beschreibung in Zeitbereich

A] Kosinus-Funktion:

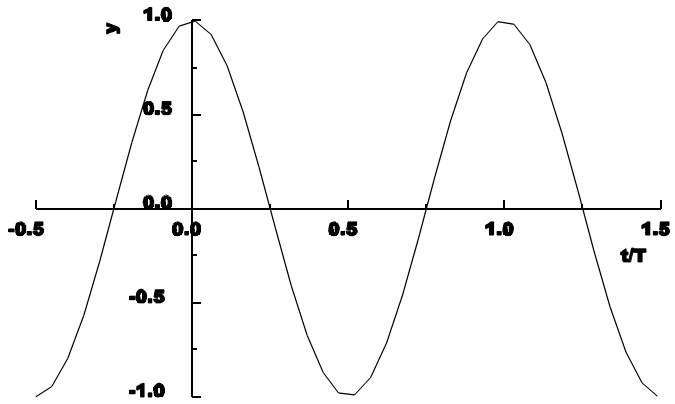


Bild EG621A: Kosinus-Funktion

Die Kosinus-Funktion

$$y = \cos(x)$$

hat die Periodendauer in x von 2π

$$y = \cos(x) = \cos(x + 2\pi)$$

Die in Bild EG621A darstellte Kosinus-Funktion y = f(t) hat die Periodendauer T

Ansatz: $y = \cos(\omega t)$ wie groß ist ω?

Bedingung: $y(t+T) = y(t)$
$y(x+2\pi) = y(x)$
$y = \cos[\omega t] = \cos[\omega(t+T)] = \cos[\omega t+\omega T]$

Aus den Vergleichen der oberen Gleichungen folgt:

$x \triangleq \omega t$

$2\pi = \omega T$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

T - Periodendauer

$$f = \frac{1}{T}$$ - Frequenz

$\omega = 2\pi * f$ - Kreisfrequenz

Anmerkung: $\omega t \triangleq$ Winkel in rad oder grad

Die obere angegebene Funktion ist noch nicht eine allgemeine harmonische Größe. Bis jetzt wurde nur die Strekkung in x- oder t-Richtung vorgenommen mit Hilfe der Frequenz.

B] Sinus-Funktion:

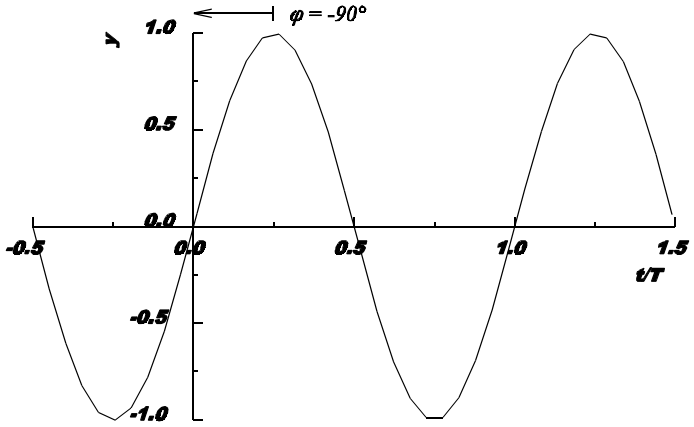


Bild EG621B: Sinus-Funktion

Die Sinus-Funktion nach Bild EG621B kann auch als verschobenen Kosinus-Funktion angesehen werden:

$$y = \sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90^\circ) = \cos(\omega t + \varphi)$$

C] Minus-Sinus-Funktion:

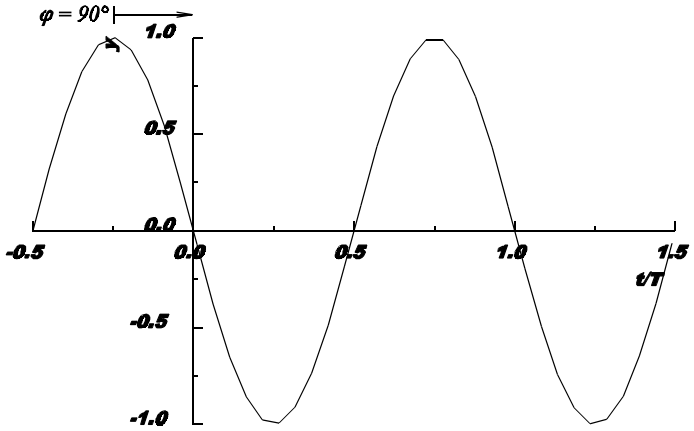


Bild EG621C: Minus-Sinus-Funktion

Die Minus-Sinus-Funktion nach Bild EG621C kann wiederum als verschobenen Kosinus-Funktion dargestellt werden:

$$y = -\sin(\omega t) = \cos(\omega t + 90^\circ) = \cos(\omega t + \varphi)$$

Aus Sinus- und Minus-Sinus-Funktion ergeben sich schon Gemeinsamkeiten:

Die Funktionen y = f(t) können als verschobene Kosinus-Funktionen

$$y = \cos(\omega t + \varphi)$$

angesehen werden, wobei der Winkel φ vom Maximum zur Schwingung nach ωt = 0 zeigt, siehe Bild EG621B und EG621C.

D] Allgemeine Verschiebung in ωt:

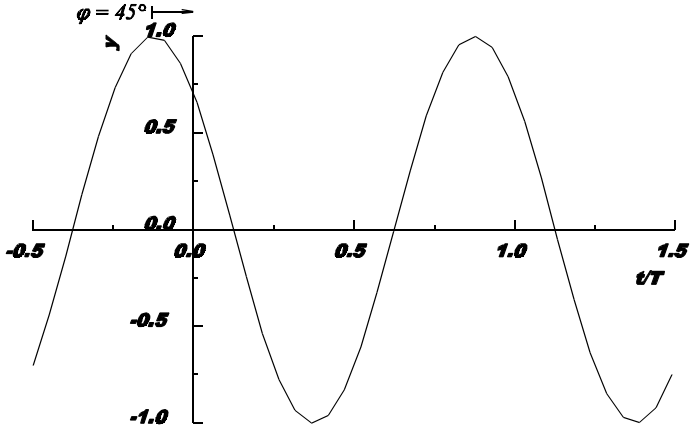


Bild EG621D:

$$y(t) = \cos(\omega t+\varphi) = \cos(\omega t+45^\circ)$$

Achtung: Der Winkel φ zählt immer vom Maximum nach ωt = 0.

(Manche Lehrbücher rechnen auch mit verschobenen Sinus-Funktionen, ist aber nicht Norm)

DIN 40110
DIN 5483

E] Allgemeiner harmonischer Verlauf:

Zum allgemeinen harmonischen Verlauf fehlt noch die Streckung in y

$$y(t) = \hat{y}*\cos(\omega t+\varphi)$$

Jeder Wert von Bild EG621D wird mit $\hat{y}$ multipliziert. $\hat{y}$ ist die Amplitude der Schwingung, siehe auch Bild EG621E.

F] Zusammenfassung:

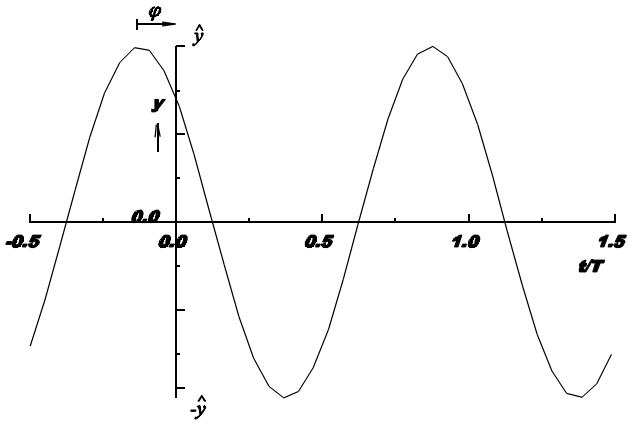


Bild EG621E: Allgemeine harmonische Schwingung

Die allgemeine harmonische Schwingung aus Bild EG621E

$$y(t) = \hat{y} * \cos(\omega t + \varphi)$$

läßt sich mit Hilfe der drei Werte

$\hat{y}$ - Amplitude, Scheitelwert, Maximalwert
φ - Phasenverschiebung und
ω - Kreisfrequenz

beschreiben.

Die **Amplitude** $\hat{y}$, auch Scheitelwert oder auch Maximalwert genannt, repräsentiert in EGII später Strom- oder Spannungsmaximalwerte.

Der **Phasenverschiebungswinkel φ** wird immer vom Maximum der Schwingung zur y-Achse (ωt = 0) gezählt.

Maximum	vor	t = 0	=>	φ > 0
Maximum	nach	t = 0	=>	φ < 0

Die **Kreisfrequenz** ω ist eine konstante Größe und läßt sich mit Hilfe der Frequenz, bzw. der Periodendauer angeben:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

[T] = s

$$[f] = Hz = \frac{1}{s}$$

$$[\omega] = \frac{1}{s}$$

6.2.2. Rotierender Scheitelwertzeiger

Eine harmonische Größe ist durch die drei Größen

- Amplitude (Betrag)
- Phase und
- Frequenz

ausreichend beschrieben. In vielen Netzwerken mit mehreren Elementen ist meist nur eine konstante Frequenz vorhanden, aber viele harmonische Wechselgrößen. **Von einer Wechselstromgröße ist somit der Betrag und die Phase von Interesse.**

Bei Betrag und Phase, an welche mathematische Zahlenart, die mit nur einer Zahl als Beschreibung auskommt, denkt man dann sofort? Antwort: an die komplexen Zahlen.

Wie kann die Funktion

$$y(t) = \hat{y} * \cos(\omega t + \varphi)$$

durch eine komplexe Zahl, bzw. Funktion dargestellt werden? Antwort: Nach Euler

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$$

ist die Kosinus-Funktion der Realteil der imaginären e-Funktion. Mit

$$\alpha = \omega t + \varphi$$

läßt sich y(t) mit Hilfe der komplexen Rechnung angeben.

$$y(t) = Re\{\hat{y} * e^{j(\omega t + \varphi)}\}$$

$$y(t) = Re\{\hat{y}[\cos(\omega t + \varphi) * j\sin(\omega t + \varphi)\}$$

$$y(t) = Re\{\underline{y}(t)\}$$

$$\underline{y}(t) = \hat{y} * e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Dieser komplexe Zeiger $\underline{y}(t)$ wird rotierender Scheitelwertzeiger genannt.

Für $\varphi = 45^\circ$ und $\hat{y} = 4$ ist die Funktion

$$\underline{y}(t) = 4 * e^{j(\omega t + 45^\circ)}$$

in der komplexen Ebene in Bild EG622A für verschiedene Winkel dargestellt. Wie erhält man grafisch aus den zeitabhängigen komplexen Zeigern den Wert von y(t)? Obere Formel gibt Auskunft: Den Realteil bilden. Realteil-bilden heißt aber Projektion auf die reelle Achse.

Konstruktion von y(t):

A] t-Achse in Richtung der negativen imaginären Achse auftragen.

B] für verschiedene ωt-Werte: Projektion auf reelle Achse bilden und in Liniendiagramm eintragen.

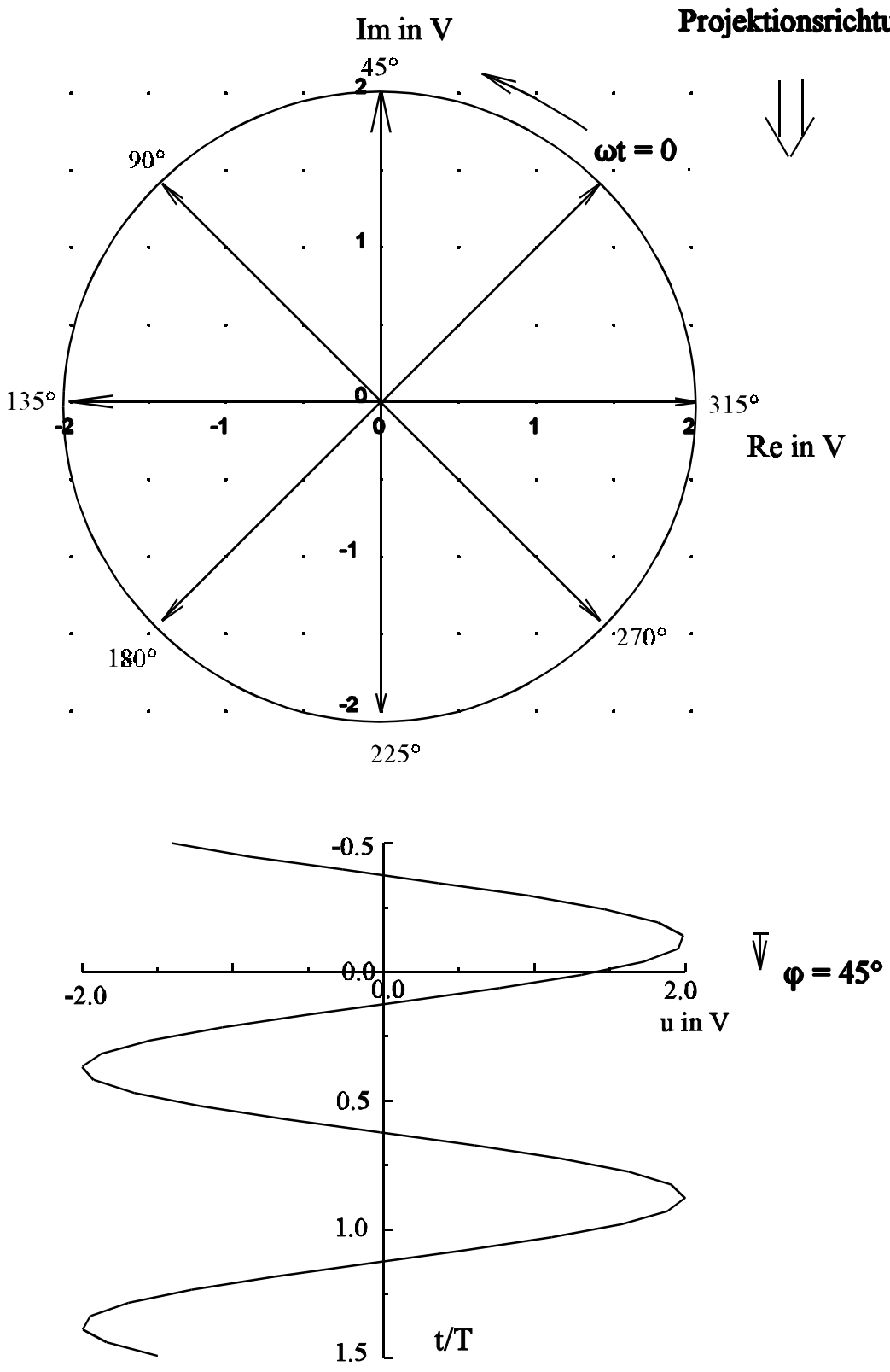

Im in V
Projektionsrichtung
45°
90°
ωt = 0
135°
315°
Re in V
180°
270°
225°
-0.5
0.0
-2.0
0.0
2.0
u in V
φ = 45°
0.5
1.0
1.5
t/T

Bild EG622A

6.2.3. Ruhender Scheitelwertzeiger

Mit rotierenden Scheitelwertzeigern zu arbeiten ist in den meisten Fällen zu umständlich. Im letzten Kapitel wurde festgestellt, daß sich die Größe

$$u(t) = \hat{u} * \cos(\omega t + \varphi)$$

durch den rotierenden Scheitelwertzeiger $\hat{u}(t) = \hat{u} * e^{j(\omega t + \varphi)}$ darstellen läßt. Die obere Größe ist aber durch die zwei Größen û und φ bei konstanter Kreisfrequenz ω gekennzeichnet. Es würde also ausreichen, einen Zeiger mit den Größen û und φ nur zur Kennzeichnung einer Wechselgröße zu benutzen. **Betrag und Phase reichen aus, um eine Wechselgröße zu kennzeichnen.**

Der ruhende Scheitelwertzeiger

$$\underline{u} = \hat{u} * e^{j\varphi}$$

charakterisiert die Wechselgröße im Zeitbereich

$$u(t) = \hat{u} * \cos(\omega t + \varphi)$$

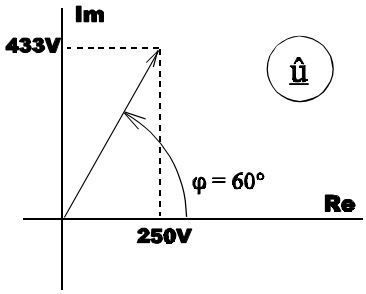
Zwischen beiden oberen Ausdrücken kann man sich die Umwandlung zwischen Bild- und Zeitbereich vorstellen. Beide Richtungen der Umwandlung sind möglich.

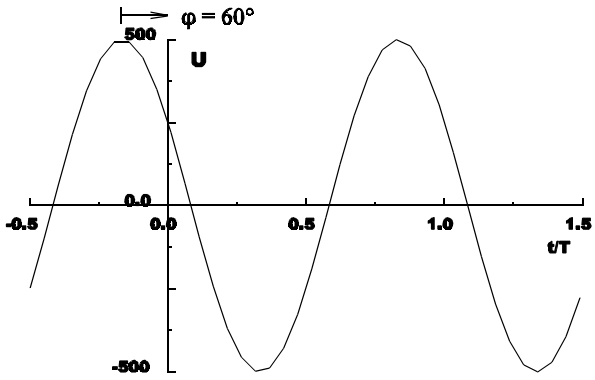
Transformation

Bildbereich	<=>	Zeitbereich
Scheitelwertzeiger	<=>	Funktionskurve
$\hat{u} * e^{j\varphi}$	<=>	$u(t) = \hat{u} * \cos(\omega t + \varphi)$

Beispiel 1:

gegeben: Scheitelwertzeiger **gesucht:** Zeitverlauf



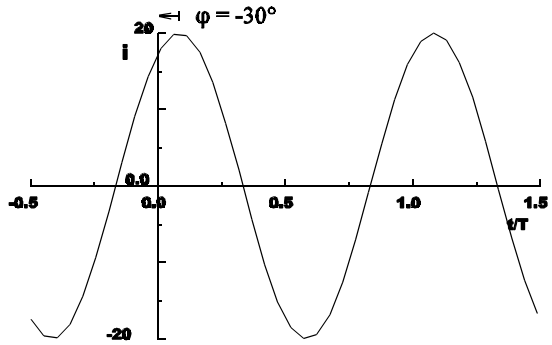


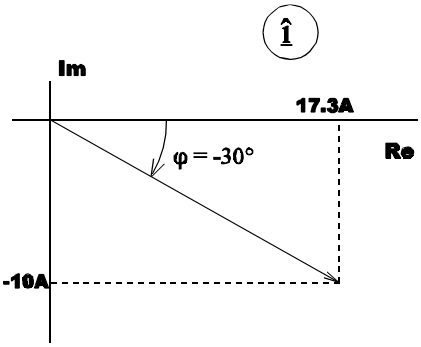
$\hat{u} = 500\ V * e^{j60^\circ}$ $u(t) = 500\ V * \cos(\omega t + 60^\circ)$

Bild EG623A

Beispiel 2:

gegeben: Zeitverlauf **gesucht:** Scheitelwertzeiger





$i(t) = 20\ A*\cos(\omega t - 30^\circ)$ $\underline{\hat{i}} = 20\ A*e^{-j30^\circ}$

Bild EG623B

6.2.4. Effektivwertzeiger

Die Netzspannung beträgt 230 V was heißt das?

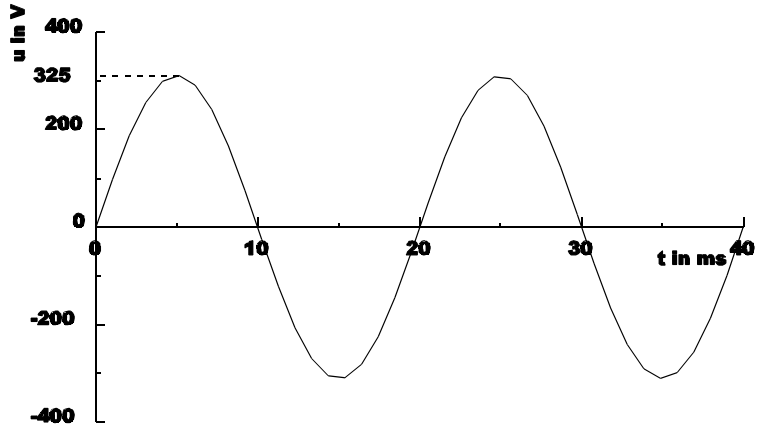


Bild EG624A

Wechselstromgroßen werden mit Effektivwerten bezeichnet, damit wie bei Gleichstrom die Leistung berechnet werden kann

$$P = U*I = \frac{U^2}{R} = I^2*R$$

Ableitung später in Kap. 6.4.2.

Der Zusammenhang zwischen Effektivwert und Maximalwert (Scheitelwert) ist durch den Faktor $\sqrt{2}$ gegeben:

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \qquad\qquad I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

Merke: Effektivwert ist geringer als Maximalwert, Faktor ist $\sqrt{2}$.

Effektivwerte werden mit großen Buchstaben gekennzeichnet.

Es wird jetzt auch ein Effektivwertzeiger definiert in der Form, daß der ruhende Scheitelwertzeiger durch $\sqrt{2}$ dividiert den Effektivwertzeiger ergibt.

ruhender Scheitelwertzeiger → Effektivwertzeiger

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u}*e^{j\varphi} \quad \rightarrow \quad \underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}*e^{j\varphi} = U*e^{j\varphi}$$

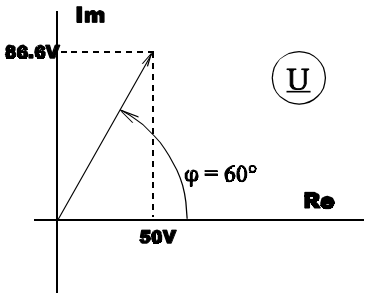
Um von dem Effektivwertzeiger zum Zeitbereich zu gelangen, muß man 2 Transformationen vornehmen. Effektivwertzeiger in Scheitelwertzeiger umformen und daraus in den Zeitbereich umformen.

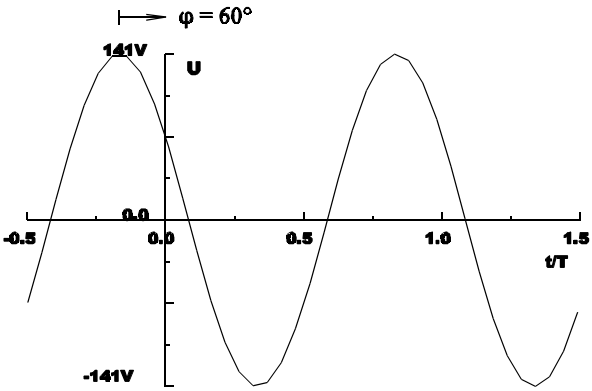
Effektivwertzeiger <=> Scheitelwertzeiger <=> Funktionskurve

$\underline{u} = U*e^{j\varphi}$ <=> $\underline{\hat{u}} = \sqrt{2}*U*e^{j\varphi}$ <=> $u(t) = \sqrt{2}*U*\cos(\omega t+\varphi)$

Beispiel 1:

gegeben: Effektivwertzeiger **gesucht:** Zeitverlauf





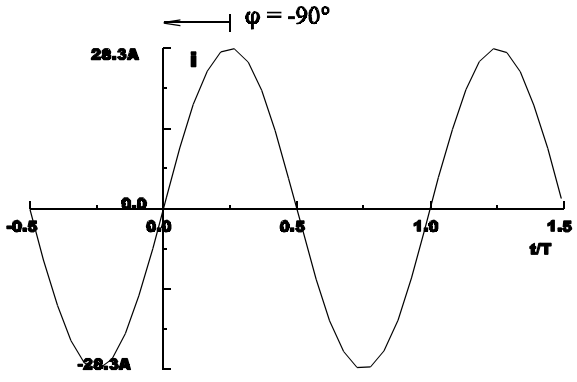
$\underline{U} = 100\ V * e^{j60^\circ}$ $u(t) = 141\ V * \cos(\omega t + 60^\circ)$

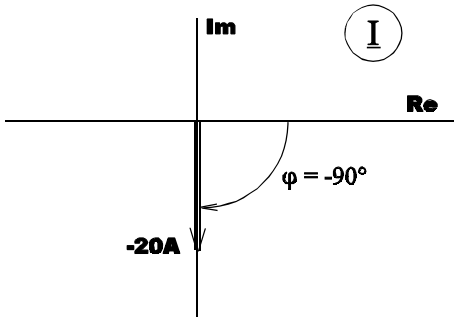
Bild EG624B

Beispiel 2:

gegeben: Zeitverlauf

$i(t) = 28.3\ A\ \cos(\omega t - 90^\circ)$





$\underline{I} = 20\ A * e^{-j90^\circ}$

Bild EG624C

6.2.5. Zusammenfassung: Beschreibung harmonischer Größen

Harmonische Größen sind zeitlich veränderliche Größen einer Frequenz. Die Kosinus-Funktion ist in t-Richtung verschoben und in y-Richtung mit der Amplitude $\hat{y}$ gestreckt.

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Die Harmonische Schwingung (z.B. einer Spannung) läßt sich beschreiben als

A] Diagramm in Zeitbereich
B] Mathematische Zeitabhängigkeit
C] Komplexer rotierender Scheitelwertzeiger
D] Komplexer ruhender Scheitelwertzeiger
E] Komplexer Effektivwertzeiger

Alle Formen sind in einander umrechnenbar, man kann dieses auch als Transformation bezeichnen, eine Transformation von den Zeitbereich in den Bildbereich (komplexe Zahl).

Transformation

Zeitbereich	<=>	Bildbereich (komplexe Zahl)
A, B	<=>	D, E

Der rotierende komplexe Scheitelwertzeiger ist eine Art Bindeglied zwischen Zeit- und Bildbereich.

A] Diagramm in Zeitbereich

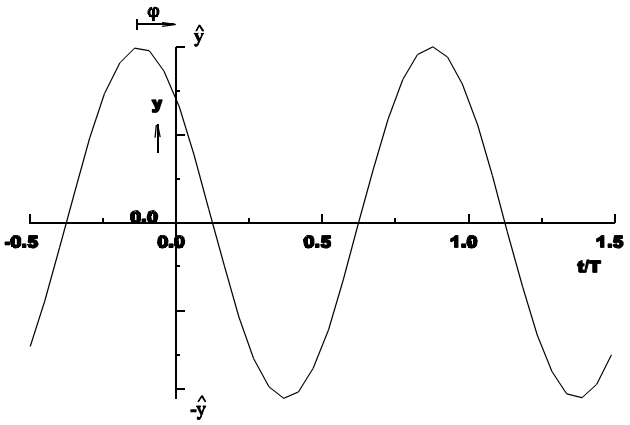


Bild EG621E:

Der Winkel φ wird vom Maximum der Spannung nach t = 0 gezählt.

B] Mathematische Zeitabhängigkeit

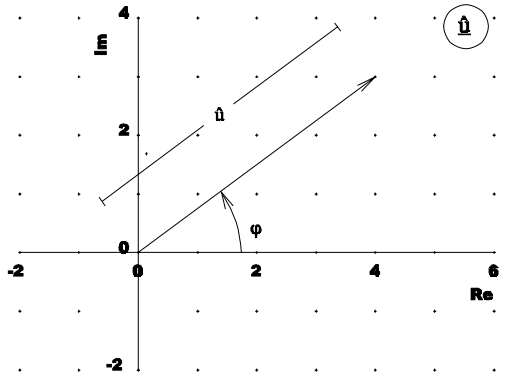
$$u(t) = \hat{u} * \cos(\omega t + \varphi)$$

C] Komplexer rotierender Scheitelwertzeiger

$$\underline{u}(t) = \hat{u} * e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$u(t) = Re\{\underline{u}(t)\} = Re\{\hat{u} e^{j(\omega t + \varphi)}\} = \hat{u} * Re\{\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)\} = \hat{u} * \cos(\omega t + \varphi)$$

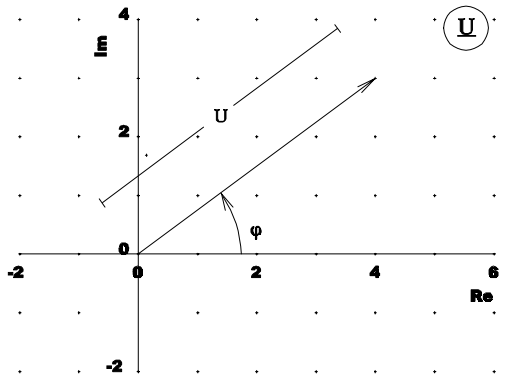
D] Komplexer ruhender Scheitelwertzeiger



$$\underline{u}(t=0) = \underline{\hat{u}}$$
$$\underline{\hat{u}} = \hat{u} * e^{j\varphi}$$

Bild EG625B

E] Komplexer Effektivwertzeiger



$$\underline{U} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi} = U * e^{j\varphi}$$
$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

Bild EG625C

Aufgaben 6.2.2 bis 6.2.5 rechnen

6.3. Addition harmonischer Größen

In Wechselstromschaltungen sind oft harmonische Schwingungen zu addieren (Kirchhoff I und II). Im Knoten werden Ströme addiert und in der Reihenschaltung Spannungen. Es soll im Zeitbereich der Aufwand gezeigt werden, anschließend wird dann eine einfachere Methode vorgestellt.

6.3.1. Addition im Zeitbereich

Führt man die Addition zweier harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz im Zeitbereich für verschiedene t-Werte aus, erhält man wieder eine Schwingung mit gleicher Frequenz, aber mit anderer Amplitude und mit anderem Phasenwinkel, siehe Bild EG631A.

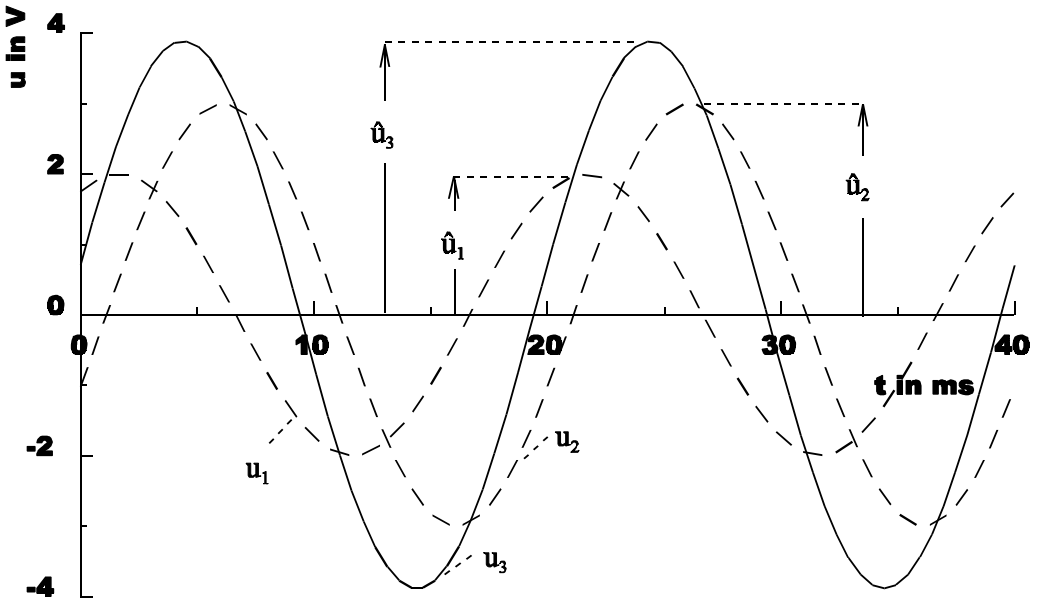


Bild EG631A

Was für Bild EG631A manuell für verschiedene t-Werte durchgeführt wurde, soll mathematisch nachvollzogen werden:

$$u_3 = u_2 + u_1$$

Mit Ansätzen

$$u_1 = \hat{u}_1 * \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2 = \hat{u}_2 * \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$u_3 = \hat{u}_3 * \cos(\omega t + \varphi_3)$$

ergibt sich

$$\hat{u}_1 * \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{u}_2 * \cos(\omega t + \varphi_2) = \hat{u}_3 * \cos(\omega t + \varphi_3)$$

Durch Anwendung der Additionstheoreme erhält man:

$$\begin{aligned} &\hat{u}_1 * \cos(\varphi_1) * \cos(\omega t) - \hat{u}_1 * \sin(\varphi_1) * \sin(\omega t) \\ + \ &\hat{u}_2 * \cos(\varphi_2) * \cos(\omega t) - \hat{u}_2 * \sin(\varphi_2) * \sin(\omega t) = \\ &\hat{u}_3 * \cos(\varphi_3) * \cos(\omega t) - \hat{u}_3 * \sin(\varphi_3) * \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Obere Gleichheit gilt für jedes t, dieses ist nur zu Erreichen, wenn die Terme mit cos(ωt) und sin(ωt) einzeln gleich sind:

$$\hat{u}_1 * \sin(\varphi_1) + \hat{u}_2 * \sin(\varphi_2) = \hat{u}_3 * \sin(\varphi_3)$$
$$\hat{u}_1 * \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 * \cos(\varphi_2) = \hat{u}_3 * \cos(\varphi_3)$$

gegeben: $\hat{u}_1, \varphi_1, \hat{u}_2, \varphi_2$

gesucht: $\hat{u}_3, \varphi_3$ => Gleichungssystem mit den 2 Unbekannten $\hat{u}_3$ und φ_3.

Durch Division oberer Gleichungen läßt sich der Phasenwinkel φ_3 bestimmen:

$$\tan(\varphi_3) = \frac{\sin(\varphi_3)}{\cos(\varphi_3)} = \frac{\hat{u}_1 * \sin(\varphi_1) + \hat{u}_2 * \sin(\varphi_2)}{\hat{u}_1 * \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 * \cos(\varphi 2)}$$

Durch Quadrierung ergibt sich die Amplitude $\hat{u}_3$:

$$[\hat{u}_3 * \sin(\varphi_3)]^2 + [\hat{u}_3 * \cos(\varphi_3)]^2 = \hat{u}_3^2[\sin^2(\varphi_3) + \cos^2(\varphi_3)] = \hat{u}_3^2$$

$$\hat{u}_3 = \sqrt{[\hat{u}_1 * \sin(\varphi_1) + \hat{u} * \sin(\varphi_2)]^2 + [\hat{u}_1 * \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 * \cos(\varphi_2)]^2}$$

Diese Methode ist sehr umständlich. Eine bessere Möglichkeit wird im nächsten Abschnitt aufgezeigt.

6.3.2. Komplexe Addition harmonischer Schwingungen

Die Schwingungen

$$u_1(t) = \hat{u}_1 * \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2(t) = \hat{u}_2 * \cos(\omega t + \varphi_2)$$

sollen addiert werden zu

$$u_3(t) = \hat{u}_3 * \cos(\omega t + \varphi_3)$$

$$u_3(t) = \hat{u}_1 * \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{u}_2 * \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Von den drei Schwingungen wird der komplexe rotierender Scheitelwertzeiger gebildet:

$$\underline{u}_1(t) = \hat{u}_1 * e^{j(\omega t + \varphi_1)}$$
$$\underline{u}_2(t) = \hat{u}_2 * e^{j(\omega t + \varphi_2)}$$
$$\underline{u}_3(t) = \hat{u}_3 * e^{j(\omega t + \varphi_3)}$$

und damit die Addition durchgeführt, danach eingesetzt und umgeformt:

$\underline{u}_3(t)$	$= \underline{u}_1(t)$	$+ \underline{u}_2(t)$
$\hat{u}_3 * e^{j(\omega t + \varphi_3)}$	$= \hat{u}_1 * e^{j(\omega t + \varphi_1)}$	$+ \hat{u}_2 * e^{j(\omega t + \varphi_2)}$
$\hat{u}_3 * e^{j\omega t} * e^{j\varphi_3}$	$= \hat{u}_1 * e^{j\omega t} * e^{j\varphi_1}$	$+ \hat{u}_2 * e^{j\omega t} * e^{j\varphi_2}$
$\hat{u}_3 * e^{\varphi_3}$	$= \hat{u}_1 * e^{\varphi_1}$	$+ \hat{u}_2 * e^{\varphi_2}$
$\underline{\hat{u}}_3$	$= \underline{\hat{u}}_1$	$+ \underline{\hat{u}}_2$
$\frac{\hat{u}_3}{\sqrt{2}}$	$= \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{2}}$	$+ \frac{\hat{u}_2}{\sqrt{2}}$
$\underline{U}_3$	$= \underline{U}_1$	$+ \underline{U}_2$

Die Addition von Schwingungen gleicher Frequenz ist somit auf die Addition zweier komplexer Zahlen zurückgeführt und damit wesentlich einfacher als im Zeitbereich.

Berechnung des Ergebnisses aus den letzten Abschnitt:

$$\underline{\hat{u}}_3 = \underline{\hat{u}}_1 + \underline{\hat{u}}_2 = \hat{u}_1 * e^{j\varphi_1} + \hat{u}_2 * e^{j\varphi_2}$$

$$\underline{\hat{u}}_3 = [\hat{u}_1 * \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 * \cos(\varphi_2)] + j[\hat{u}_1 * \sin(\varphi_2) + \hat{u}_2 * \sin(\varphi_2)]$$

Daraus lassen sich Betrag und Phase von u_3 berechnen:

$$\hat{u}_3 = \sqrt{[\hat{u}_1 * \cos(\varphi_1) + \hat{u}_2 * \cos(\varphi_2)]^2 + [\hat{u}_1 * \sin(\varphi_2 + \hat{u}_2 * \sin(\varphi_2)]^2}$$

$$\varphi_3 = \arctan\left[\frac{\hat{u}_1 * \sin(\varphi_2) + \hat{u}_2 * \sin(\varphi_2)}{\hat{u}_1 * \cos(\varphi_2) + \hat{u}_2 * \cos(\varphi_2)}\right]$$

Fazit: Schwingungen gleicher Frequenz lassen sich mit Hife der komplexen Rechnung addieren.

6.3.3. Wiederholung komplexe Rechnung

Da die komplexe Rechnung für die Wechselstromrechnung besonders wichtig ist, sollen an dieser Stelle die Rechenregeln für die komplexe Rechnung wiederholt werden.

6.3.3.1. Definitionen

$\sqrt{-1} = j$ $\quad j^2 = -1$ $\quad$ j = imajinäre Einheit

Die allgemeine komplexe Zahl setzt sich aus einem Realteil (Reelle Zahl) und einer imaginären Zahl (reelle Zahl mal imaginäre Einheit) zusammen.

$\underline{z} = a + jb = r*e^{j\varphi}$

6.3.3.2. Gauß'sche Zahlenebene

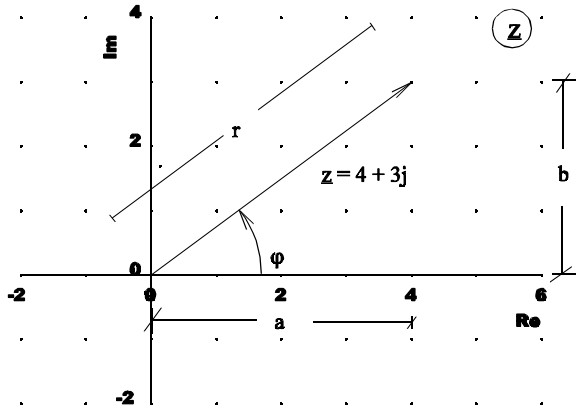


Bild EG6332A: Gauß'sche Zahlenebene

6.3.3.3. Euler Formel

$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$

$\underline{z} = a + jb$ $\quad$ Komponentenschreibweise

$\underline{z} = r*e^{j\varphi} = r\angle\varphi$ $\quad$ Versor-Schreibweise

6.3.3.4. Umwandlung von kartesischen Koordinaten in Polar-Koordinaten

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} \qquad x > 0$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} + \pi \qquad x < 0$$

6.3.3.5. Umwandlung von Polar-Koordinaten in kartesischen Koordinaten

$a = r*\cos(\varphi)$ $\quad b = r*\sin(\varphi)$

6.3.3.6. Konjungiert komplexe Zahl

$\underline{z}^* = (a + jb)^* = [r*e^{j\varphi}]^*$

$\underline{z}^* = a - jb = r*e^{-j\varphi}$

$\underline{z}*\underline{z}^* = a^2 + b^2 = r^2$ $\quad z + z^* = 2a$ $\quad z - z^* = 2b$

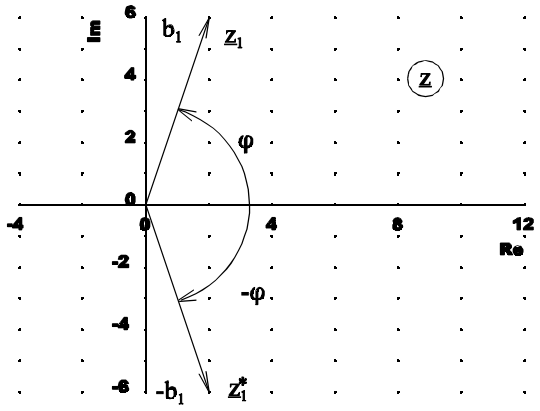


Bild EG6336A: Konjungiert komplexe Zahl

6.3.3.7. Potenzen von j

$j^0 = 1$

$j^1 = j$ $\quad \frac{1}{j} = -j$

$j^2 = -1$ $\quad \frac{1}{j^2} = -1$

$j^3 = -j$ $\quad \frac{1}{j^3} = j$

$j^4 = 1$ $\quad \frac{1}{j^4} = 1$

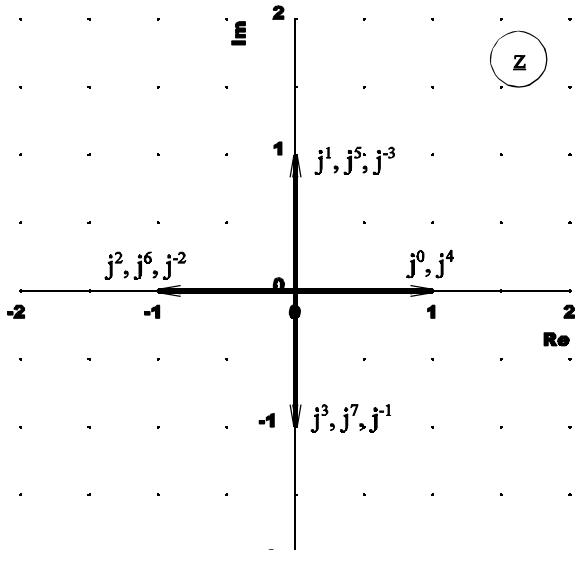


Bild EG6337A: Potenzen von j

6.3.3.8. Addition komplexer Zahlen

$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j$

$a_3 = a_1 + a_2 \qquad b_3 = b_1 + b_2$

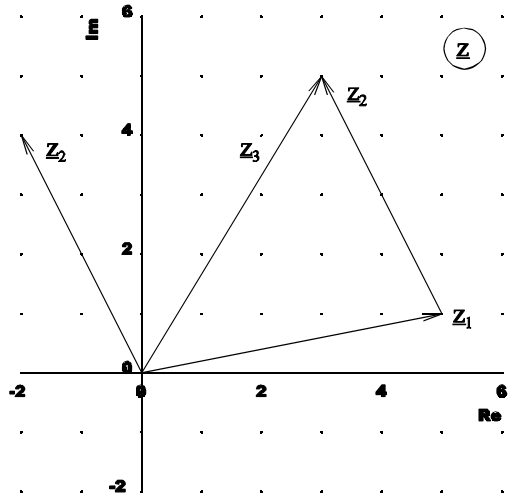


Bild EG6338A: Grafische Addition komplexer Zahlen

6.3.3.9. Subtraktion komplexer Zahlen

$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

$a_3 = a_1 - a_2 \qquad b_3 = b_1 - b_2$

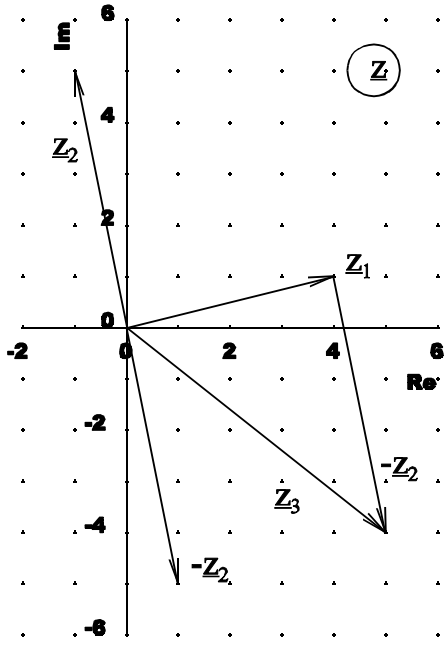
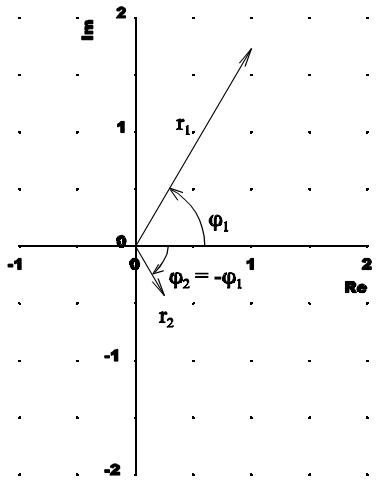


Bild EG6339A: Grafische Subtraktion komplexer Zahlen

6.3.3.10. Inversion einer komplexen Zahl



$$\frac{1}{\underline{z}_1} = \frac{1}{a_1 + jb_1} * \frac{a_1 - jb_1}{a_1 - jb_1} = \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} - j\frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\underline{z}_2 = \frac{1}{\underline{z}_1} = \frac{1}{r_1 e^{j\varphi_1}} = \frac{1}{r_1} * e^{-j\varphi_1} = r_1^{-1} \underline{/-\varphi_1} = r_2 \underline{/\varphi_2}$$

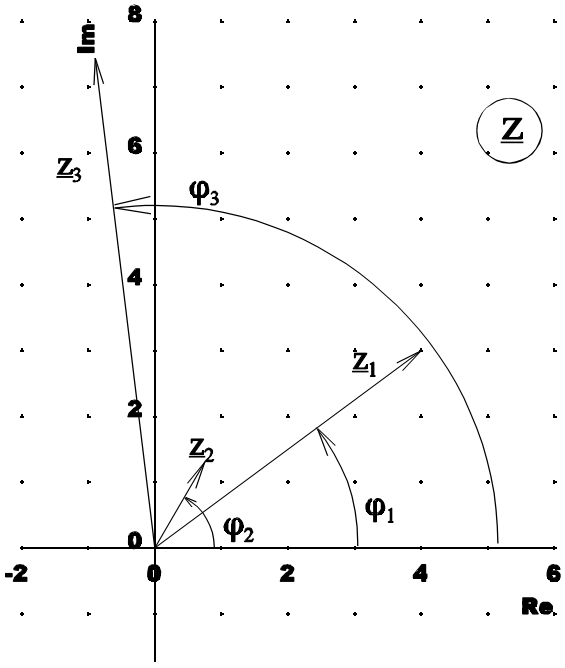
$$r_2 = \frac{1}{r_1}$$

$$\varphi_2 = -\varphi_1$$

Bild EG3310A: Grafisch Darstellung der Inversion

6.3.3.11. Multiplikation komplexer Zahlen

$\underline{z}_1 * \underline{z}_2 = r_1 * e^{j\varphi} * r_2 * e^{j\varphi 2} = (r_1 * r_2) * e^{j(\varphi 1 + \varphi 2)}) = r_1 * r_2 \underline{/\varphi_1 + \varphi_2} = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1 * a_2 - b_1 * b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$



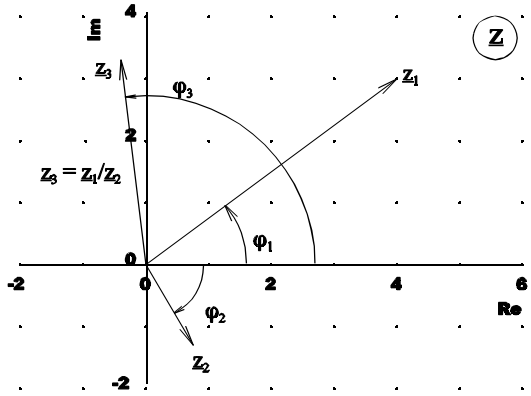
$$r_3 = r_1 * r_2$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$$

Bild EG3311A: Grafische Multiplikation komplexer Zahlen

6.3.3.12. Division komplexer Zahlen

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{r_1 * e^{j\varphi 1}}{r_2 * e^{j\varphi 2}} = \frac{r_1}{r_2} * e^{j(\varphi 1 - \varphi 2)} = \frac{r_1}{r_2} \underline{/\varphi_1 - \varphi_2}$$



$r_3 = \frac{r_1}{r_2}$

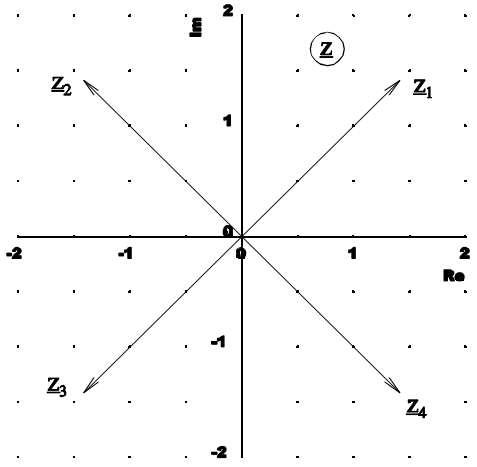
$\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$

Bild EG63312A

6.3.3.13. Multiplikation einer komplexen Zahl mit Potenzen von j

$z_1 = r*e^{j\varphi}$

$z_2 = r*e^{j\varphi}*j = r*e^{j\varphi}*e^{j90^\circ}$



hier: $\varphi = 45^\circ$
$\underline{z}_1 = 2*e^{j45}$

Bild EG63313A

$z_3 = r*e^{j\varphi}*j^2 = r*e^{j\varphi}*e^{j180^\circ}$

$z_4 = r*e^{j\varphi}*j^3 = r*e^{j\varphi}*e^{j270^\circ}$

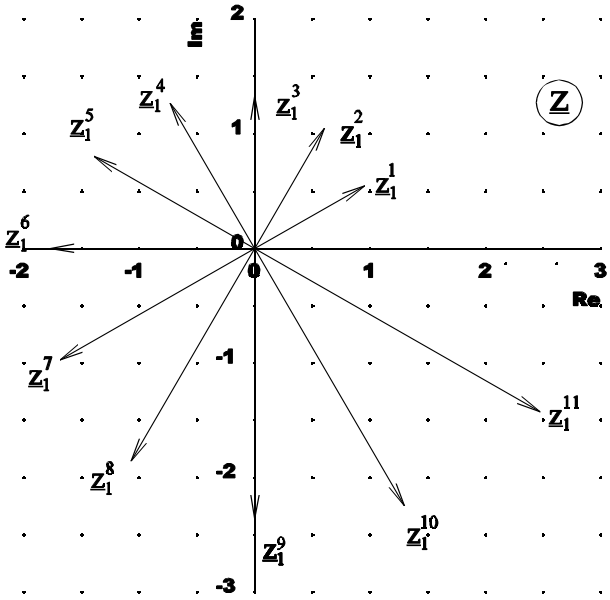
$z_5 = r*e^{j\varphi}*1/j = r*e^{j\varphi}*e^{j-90^\circ}$

$z_6 = r*e^{j\varphi}*(-j) = r*e^{j\varphi}*e^{j-90^\circ}$

6.3.3.14. Potenzen einer komplexen Zahl

$\underline{z}^n = (r*e^{j\varphi})^n = r^n*e^{j\varphi n}$

$\underline{z}^n = (r\angle\varphi)^n = r^n\angle\varphi*n$



$\underline{z}_1 = 1.1\angle 30^\circ$

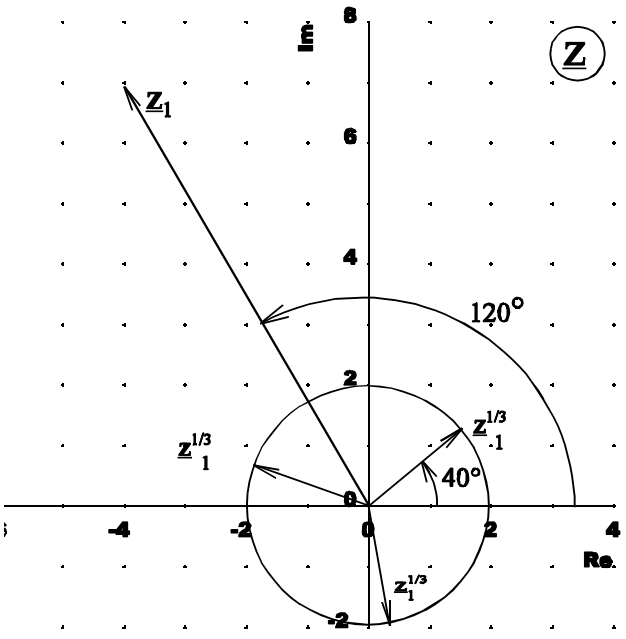
$\underline{z}_1^2 = 1.21\angle 60^\circ$

$\underline{z}_1^3 = 1.331\angle 90^\circ$

Bild EG63314A

6.3.3.15. m-te Wurzel aus einer komplexen Zahl

$$\sqrt[m]{\underline{z}} = \underline{z}^{1/m} = (r*e^{j\varphi})^{1/m}$$
$$\sqrt[m]{\underline{z}} = (r*e^{j\varphi}*e^{jn*360^\circ})^{1/m}$$
$$\sqrt[m]{\underline{z}} = r^{1/m}*e^{j\varphi/m}*e^{jn/m*360^\circ}$$
$$\sqrt[m]{\underline{z}} = \sqrt[m]{r}\angle\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{n}{m}*360^\circ\right)$$



$\underline{z}_2 = \sqrt[3]{\underline{z}_1}$

$r_1 = 8$

$r_2 = \sqrt[3]{8} = 2$

Bild EG63315A

6.3.3.16. Welche Operation in welcher Form

Kartesische Form	Polarform
Addition	Multiplikation
Subtraktion	Division
konjungiert komplex	Inversion
	Potenzierung
	Wurzelziehen
	konjungiert komplex

6.3.3.17. Logarithmus aus einer komplexen Zahl

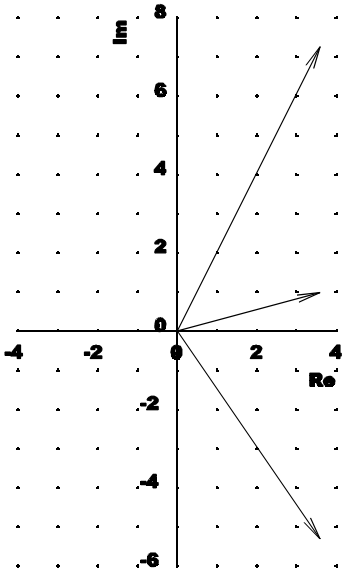
$\underline{z} = r*e^{j\varphi}$

$\underline{z} = r*e^{j\varphi}*e^{jn*2\pi}$

$\ln(\underline{z}) = \ln[r*e^{j\varphi}*e^{jn*2\pi}]$

$\ln(\underline{z}) = \ln(r) + \ln(e^{j\varphi}) + \ln(e^{jn*2\pi})$

$\ln(\underline{z}) = \ln(r) + j(\varphi + n*2\pi)$



ln(20 + j30)

Bild EG63317A

6.3.3.18. Gleichheit komplexer Zahlen

$\underline{z}_1 = a_1 + jb_1 = r_1 * e^{j\varphi_1}$

$\underline{z}_2 = a_2 + jb_2 = r_2 * e^{j\varphi_2}$

$\underline{z}_1 = \underline{z}_2 \Rightarrow [a_1 = a_2 \text{ und } b_1 = b_2] \text{ oder } [r_1 = r_2 \text{ und } \varphi_1 = \varphi_2]$

6.3.3.19. Differentiation nach dem Winkel

$\underline{z} = A*e^{j\varphi}$

$d\underline{z}/d\varphi = jA*e^{j\varphi} = A*e^{j(\varphi+90^\circ)} = A\angle\underline{\varphi+90^\circ} = A\angle\underline{\varphi}*1\angle\underline{90^\circ} = \underline{z}*\angle\underline{90^\circ}$

Die Differentiation nach dem Winkel bedeutet eine Drehung um +90°.

6.3.3.20. Integration nach dem Winkel

$\underline{z} = A*e^{j\varphi}$

$$\int \underline{z} d\varphi = A*\int e^{j\varphi} d\varphi = \frac{1}{j} A*e^{j\varphi} = A*e^{j(\varphi-90^\circ)} = A\angle\underline{\varphi}*\angle\underline{-90^\circ} = \underline{z}*\angle\underline{-90^\circ}$$

Die Integration nach dem Winkel bedeutet eine Drehung um -90°.

6.3.3.21. Schreibweise komplexer Zahlen

Hier soll die Spannung $\underline{u}$ betrachtet werden. Das Ergebnis gilt auch für alle anderen komplexen physikalischen Größen, z.B. für I.

$\underline{U}$	komplexe Zahl mit Unterstrich
$\lvert\underline{U}\rvert = U$	Beträge werden ohne Betragszeichen, nur mit den Buchstaben ohne Unterstrich gekennzeichnet
	$\underline{U} = U*e^{j\varphi}$

u(t)	- Zeitabhängiger Verlauf
$\underline{u}(t)$	- rotierender Scheitelwertzeiger
$\hat{\underline{u}}$	- ruhender Scheitelwertzeiger
$\underline{U}$	- Effektivwertzeiger
U	- Betrag des Effektivwertes ($U = \lvert\underline{U}\rvert$)

Fazit: - große Buchstaben für Effektivwert
- kleine Buchstaben für zeitabhängige Werte und Maximalwerte
- "^" für Maximalwerte (Scheitelwerte, ruhend)

6.4. Kennwerte von zeitabhängigen Größen

Was wird mit dem Meßgerät an einer zeitabhängigen Größe gemessen? Der Zeitwert kann z.B. bei f = 50 Hz nicht angezeigt werden, weil dieser sich zu schnell ändert. Bei einem Zeigermeßgerät kann die Masse aufgrund der Trägheit nicht dem Meßsignal folgen. Es wird eine Art Mittelwert gemessen. Es gibt verschiedene Arten von Mittelwerten:

- arithmetischer Mittelwert
- quadratischer Mittelwert
- Gleichrichtwert

Drehspul-Meßgeräte zeigen den arithmetischen Mittelwert ($\alpha \sim i$) an und Dreheisen-Meßgeräte den quadratischen Mittelwert ($\alpha \sim i^2$).

6.4.1. Arithmetischer Mittelwert

Der arithmetische Mittelwert ergibt sich aus dem konstanten Wert, der die gleiche Fläche zur Folge hat, als der Verlauf y(t), siehe Bild EG641A.

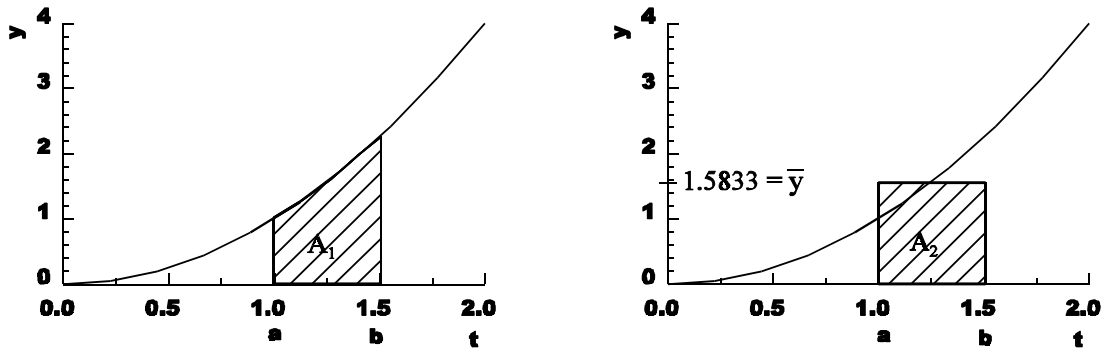


Bild EG641A

Aus den Gleichsetzen der Flächen A_1 und A_2

$$A_1 = \int_{t=a}^{b} y(t)\,dt$$

$$A_2 = \bar{y}(b - a)$$

ergibt sich

$$\int_{t=a}^{b} y(t)\,dt = \bar{y}(b - a)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{b - a}\int_{t=a}^{b} y(t)\,dt$$

Der arithmetische Mittelwert ergibt sich durch Integration über t des betrachteten Bereiches und anschließender Division durch die Breite in t des Bereiches.

Beispiel 1:

Für die in Bild EG641A dargestellte Funktion

$$y(t) = \left(\frac{t}{1\,s} \right)^2$$

soll der Mittelwert im Bereich t = 1s bis t = 1.5s festgestellt werden.

$$\bar{y} = \frac{1}{1.5 - 1s} \int_{t=1s}^{1.5t} \frac{t^2}{(1\,s)^2}\,dt = \frac{1}{3 * 0.5\,s^3} t^3 \Big|_{t=1\,s}^{1.5\,s} = \frac{1}{1.5\,s^3}\left[(1.5\,s)^3 - (1\,s)^3\right] = 1.5833$$

Hinweis: Normal ist, den Mittelwert eines periodischen Signals in den Grenzen der Periodendauer zu berechnen.

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_{t=t_1}^{t_1+T} y(t)\,dt$$

Beispiel 2:

Der arithmetische Mittelwert einer harmonischen Größe

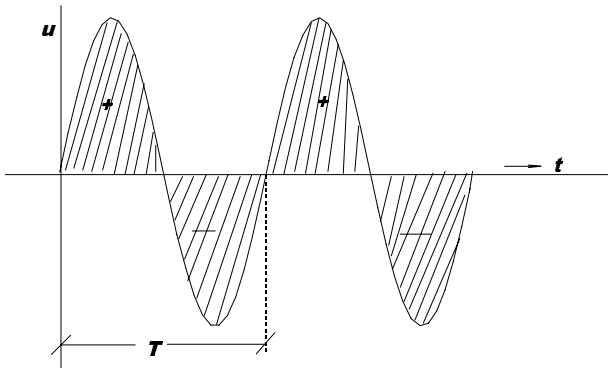


Bild EG641B

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} u(t)\,dt = \frac{1}{T} \int \hat{u} * \sin(\omega t)\,dt$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\omega T} \int_{\omega t=0}^{2\pi} u(\omega t)\,d(\omega t)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} u(\alpha)\,d\alpha$$

$$\bar{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \hat{u} * \cos(\alpha)\,d\alpha = \frac{\hat{u}}{2\pi} \sin(\alpha) \Big|_{\alpha=0}^{2\pi} = 0$$

Fazit: Der arithmetische Mittelwert einer rein harmonischen Größe ist Null. **Der arithmetische Mittelwert einer reinen Wechselgröße (Summe von Harmonischen) ist Null.**

6.4.2. Quadratischer Mittelwert

An der Steckdose sind nominell 230 V Wechselspannung vorhanden.

Versuch: Messen der Spannung an der Steckdose mit dem Oszillographen.

Ergebnis:

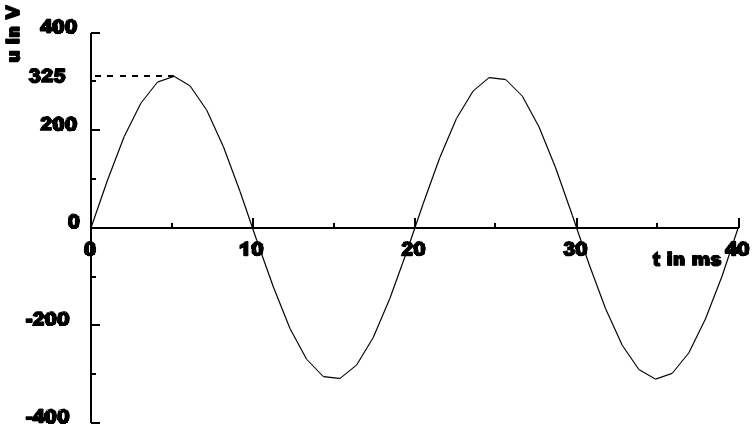


Bild EG624A

Es wird ein Maximalwert von 325 V bei einer Periodendauer von 20 ms gemessen.

$$\frac{325\ V}{230\ V} = 1.41 = \sqrt{2} \qquad !!!! \qquad \text{Faktor } \sqrt{2} \text{ !!!!}$$

Der Faktor $\sqrt{2}$ wurde in Kap. 6.2.4 schon als Unterschied zwischen Effektivwert und Scheitelwert erwähnt. Hier soll nun die mathematisch physikalische Erklärung für den Effektivwert erfolgen.

Beispiel:

Für einen ohmschen Widerstand R in dem der Strom

$$i(t) = \hat{i} * \cos(\omega t)$$

fließt, soll der Wert I (Effektivwert) bestimmt werden, für den gilt:

$$P = \overline{p(t)} = I^2 * R$$

Nach der obigen Formel ergibt sich dann mit Hilfe des Effektivwertes der Mittelwert der Leistung wie bei Gleichstrom.

$$p(t) = u(t)*i(t) = [R*i(t)]*i(t) = R*[i(t)]^2$$

$$I^2 * R = \overline{p(t)} = \overline{R*[i(t)]^2} = R*\overline{[i(t)]^2}$$

$$I = \sqrt{\overline{i(t)^2}} \qquad I = \sqrt{\overline{i^2}}$$

Der quadratische Mittelwert ist somit die Wurzel aus dem Mittelwert des Quadrats der betrachteten Größe.

Für eine periodische Funktion i(t) muß zur Bestimmung des Mittelwertes über eine Periode integriert werden und durch die Periodendauer dividiert werden.

Mathematische Berechnung des quadratischen Mittelwertes allgemein:

$$U = U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} u^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} u^2(\alpha)\,d\alpha} \qquad \alpha = \omega t$$

$$I = I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} i^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} i^2(\alpha)\,d\alpha}$$

$$P = \overline{p(t)} = \frac{1}{T}\int_{(T)} p(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} p(\alpha)\,d\alpha$$

Bei den oberen Formeln wurde auf der rechten Seite über α integriert. Dieses ist im allgemeinen einfacher, weil durch die dimensionslose Periodendauer 2π sich besser dividieren läßt als durch ω.

Konvention und Zusammenfassung

Effektivwerte sind quadratische Mittelwerte und entsprechen äquivalenten Gleichstromwerten, die mit großen Buchstaben bezeichnet werden, der Index eff entfällt.

zeitabhängige Größen:	kleine Buchstaben	u(t), i(t), p(t)
Effektivwerte:	große Buchstaben	U, I, P
Gleichstromgrößen:	große Buchstaben	U, I, P
harmonische Größe:	$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$	$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$
Leistung, Gleichstrom:	an R	$P = I^2 * R = \frac{U^2}{R}$
Leistung, Wechselstrom:	an **R**	$P = I^2 * R = \frac{U^2}{R}$

Beweis $\sqrt{2}$:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} i^2(t)dt}$$

$i(t) = \hat{\imath}*\sin(\omega t)$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \hat{\imath}^2 * \sin^2(\omega t)dt}$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\alpha)]$$

$$I = \sqrt{\frac{\hat{\imath}^2}{T}\int_{t=0}^{T} \frac{1}{2}[1 - \cos(2\omega t)]dt}$$

$$I = \sqrt{\frac{\hat{\imath}^2}{2T}\left[\int_{t=0}^{T} dt - \int_{t=0}^{T} \cos(2\omega t)dt\right]}$$

Das obere rechte Integral ist der Mittelwert über zwei Perioden einer harmonischen Funktion, ergibt also Null:

$$\int_{t=0}^{T} \cos(2\omega t)dt = 0$$

$$\int_{t=0}^{T} dt = t\Big|_{t=0}^{T} = T$$

$$I = \sqrt{\frac{\hat{\imath}^2}{2T} * T} = \sqrt{\frac{\hat{\imath}^2}{2}} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}$$

Damit ist der Faktor $\sqrt{2}$ bestätigt.

6.4.3. Gleichrichtwert

Eine weitere wichtige Größe ist der Gleichrichtwert.

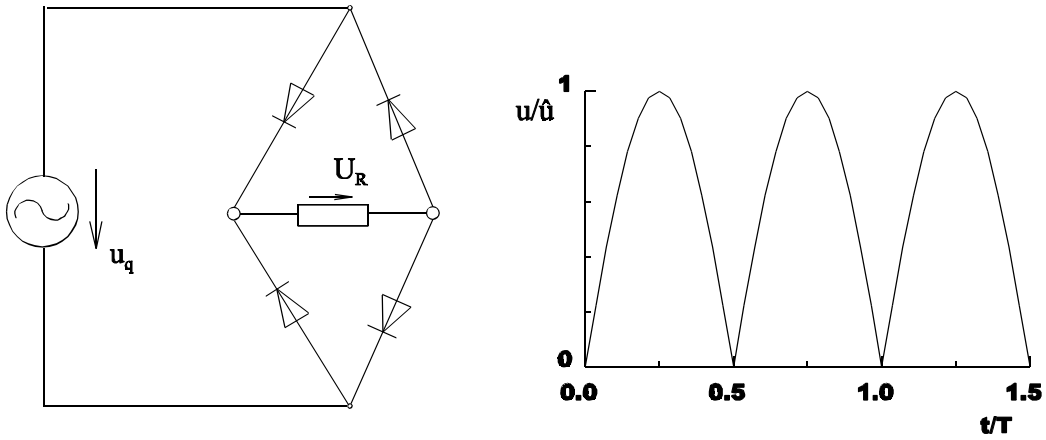


Bild EG643A

Manchmal werden Wechselspannungen gleichgerichtet, um sie dann mit einem Drehspul-Meßgerät zu messen. Die reine Wechselspannung mit einem Drehspul-Meßgerät zu messen, bringt nichts, weil der arithmetische Mittelwert Null ist und somit keine Anzeige erfolgt. Die obere Schaltung sorgt dafür, daß von der Spannung $u_q(t)$ der Betrag gebildet wird. Entsprechend ist auch die mathematische Vorschrift für den Gleichrichtwert: Es ist der arithmetische Mittelwert vom Betrag einer Größe zu bilden

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} |u(t)|\, dt$$

$$\overline{|u|} = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha=0}^{2\pi} |u(\alpha)|\, d\alpha$$

Weil durch die Gleichrichtung die Periodendauer sich halbiert hat, kann bei der oberen Schwingung der Mittelwert nur über einen Bereich von 180° gebildet werden. Angewandt auf die obere Größe ergibt sich:

$$\overline{|u|} = \frac{\hat{u}}{\pi} * \int_{\alpha=0}^{\pi} \sin(\alpha)\, d\alpha = \frac{\hat{u}}{\pi}\,[-\cos(\alpha)]\Big|_{\alpha=0}^{\pi} = \frac{2}{\pi} * \hat{u}$$

$$\overline{|u|} = \frac{2}{\pi} * \hat{u} = 0.637 * \hat{u} \qquad \text{für harmonische Größe}$$

Hinweis: Falls der Verlauf u(t) Nullstellen aufweist, müssen diese gefunden werden und die einzelnen Anteile mit entsprechendem Vorzeichen addiert werden.

6.4.4. Formfaktor

Der Formfaktor ist das Verhältnis von Effektivwert zu Gleichrichtwert:

$$F_u = \frac{U}{|\overline{u}|} \qquad F_i = \frac{I}{|\overline{i}|}$$

Insbesondere für nicht harmonische Größen ist der Formfaktor ein Maß für die Kurvenform.

Für harmonische Größen gilt:

$$F_u = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} * \hat{u}}{\frac{2}{\pi} * \hat{u}} = \frac{\pi}{2 * \sqrt{2}} = 1.11$$

6.4.5. Kennwerte von nicht harmonischen Wechselgrößen

Die Definitionen von arithmetischen Mittelwert, quadratischen Mittelwert, Gleichrichtwert und Formfaktor sind schon bekannt (siehe Kap. 6.4.1 bis 6.4.4. Hier sollen diese Vorschriften auf nicht harmonischen Wechselgrößen angewendet werden.

Die allgemeine Form einer periodischen Wechselgröße

$$u(t) = \sqrt{2}*U_1*\cos(\omega t + \varphi_1) + \sqrt{2}*U_2*\cos(2\omega t + \varphi_2) + \sqrt{2}*U_3*\cos(3\omega t + \varphi_3) + ...$$

ergibt sich aus Grundschwingung plus Überlagerung der Oberschwingungen.

6.4.5.1. Arithmetischer Mittelwert

$$u(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + ...$$

$$\overline{u(t)} = \overline{f_1(t)} + \overline{f_2(t)} + \overline{f_3(t)} + ...$$

Um den Mittelwert zu erhalten, müssen die Mittelwerte einer jeden Schwingung aufsummiert werden, und die sind nach Kap. 6.4.1. bekanntlich Null. Also ist auch der gesamte arithmetischer Mittelwert Null.

$$\bar{u} = 0$$

Der Mittelwert einer reinen Wechselgröße ist Null.

6.4.5.2. Quadratischer Mittelwert

$$u^2(t) = 2 * U_1^2 * \cos^2(\omega t + \varphi_1)$$
$$+ 2 * U_2^2 * \cos^2(2\omega t + \varphi_2)$$
$$+ 2 * U_3^2 * \cos^2(3\omega t + \varphi_3)$$
$$+$$
$$+ 2 * (\sqrt{2})^2 * U_1 * U_2 * \cos(\omega t + \varphi_1) * \cos(2\omega t + \varphi_2)$$
$$+$$

Das Quadrat einer allgemeinen periodischen Wechselgröße setzt sich aus zwei Hauptteilen zusammen. Und zwar aus den Quadraten der Einzelschwingungen und aus den gemischten Produkten. Die gemischten Produkte haben keinen Anteil am quadratischen Mittelwert, weil gilt:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos(mx) * \cos(nx)\, dx = 0 \qquad \text{für } m \neq n$$

Mit der Formel

$$U = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} u_2^2(\alpha)\, d\alpha}$$

ergibt sich mit

$$\cos^2(\omega_i t + \varphi_i) = \frac{1}{2}[\cos(2\omega_i + 2\varphi_i) + 1]$$

und

$$\overline{u^2(t)} = 2 * \frac{1}{2} U_1^2 + 2 * \frac{1}{2} U_2^2 + 2 * \frac{1}{2} U_3^2 + ...$$

der quadratische Mittelwert einer allgemein periodischen Wechselgröße

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + ...}$$

als die Wurzel der Summe aus den Effektivwerten der Grundschwingung und der Summe der Oberschwingungen.

Falls u(t) den Gleichanteil U_G aufweist

$$u(t) = U_G + \sqrt{2}\, U_1 * \cos(\omega t + \varphi) + \sqrt{2}\, U_2 * \cos(2\omega t + \varphi_2) + ...$$

läßt sich ohne Herleitung angeben:

$$U = \sqrt{U_G^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + ...}$$

6.4.5.3. Grundschwingungsgehalt

Der Grundschwingungsgehalt gibt das Verhältnis des Grundschwingungs-Effektivwertes zum gesamten Effektivwert an.

$$g_u = \frac{U_1}{U} = \frac{U_1}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + ...}}$$

6.4.5.4. Klirrfaktor

Der Klirrfaktor, auch Oberschwingungsgehalt oder Verzerrungsgehalt genannt, gibt das Verhältnis der Effektivwerte von Oberschwingung zur gesamten Wechselgröße an.

Effektivwert der Oberschwingungen:

$$U_d = \sqrt{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 ...}$$

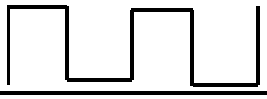
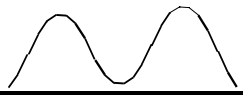
$$d_u = \frac{U_d}{U} = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + ...}}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + ...}}$$

$$d_u = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2}}{U} = \frac{U_d}{U} = \sqrt{1 - g_u^2} \qquad U^2 - U_1^2 = U_d$$

$$d_u^2 + g_u^2 = 1$$

6.4.5.5. Zahlenwerte für spezielle Formen

Für drei Formen sind in der folgenden Tabelle der quadratische Mittelwert, der Gleichrichtwert und der Formfaktor dargestellt.

			
	Rechteckform	Sinusform	Dreieckform
quadratischer Mittelwert U	û	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = 0.707\hat{u}$	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} = 0.577\hat{u}$
Gleichrichtwert $\overline{\lvert u \rvert}$	û	$\hat{u} * \frac{2}{\pi} = 0.637\hat{u}$	$\frac{\hat{u}}{2} = 0.5\hat{u}$
Formfaktor F	1	1.11	1.15
g_u	0.900	1	0.9927
d_u	0.435	0	0.1202

6.4.5.6. Scheitelwert

Bei einer harmonischen Größe ist der Scheitelwert und die Amplitude û gleich.

harmonisch: Scheitelwert = û

Bei einer nicht harmonischen Wechselgröße ist der Scheitelwert der Maximalwert.

6.5. Einfache Schaltungen

In diesem Abschnitt sollen die Grundlagen der komplexen Wechselstromrechnung erarbeitet werden. An folgenden Schaltungen sollen der Zeitverlauf und die komplexen Größen diskutiert werden.

A]	Widerstand R	(Kap. 6.5.1)
B]	Induktivität L	(Kap. 6.5.2)
C]	Kapazität C	(Kap. 6.5.3)
D]	Reihenschaltung R-L	(Kap. 6.5.7)
E]	Reihenschaltung R-C	(Kap. 6.5.8)
F]	Parallelschaltung R-C	(Kap. 6.5.9)

Folgende, schon für Gleichstrom bekannte Gesetz, werden auf Wechselstrom erweitert

a)	Kirchhoffsche Gesetze	(Kap. 6.5.5)
b)	Ohmsches Gesetz	(Kap. 6.5.10)

6.5.1. Widerstand R

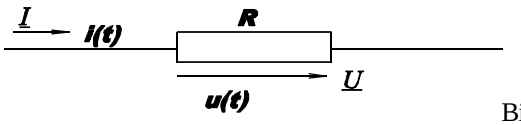


Bild EG651A

6.5.1.1. Zeitbereich

Bei vorgegebenen Strom

$$i(t) = \hat{i}*\cos(\omega t + \varphi_i)$$

läßt sich die Spannung über das ohmsche Gesetz berechnen:

$$u(t) = R*i(t) = R*\hat{i}*\cos(\omega t + \varphi_i)$$

Das ohmsche Gesetz gilt da bei für jeden Zeitpunkt t. Aus dem Vergleich der oberen Formel mit

$$u(t) = \hat{u}*\cos(\omega t + \varphi_u)$$

ergibt sich

$$\hat{u} = R*\hat{i} \qquad \varphi_u = \varphi_i \qquad \varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i = 0$$

Fazit: An einem ohmschen Widerstand sind Strom und Spannung in Phase ($\varphi_u = \varphi_i$) und die Amplituden sind über das ohmsche Gesetz mit R verknüpft.

6.5.1.2. Komplexe Behandlung

Die Größen u(t) und i(t) werden in rotierende Scheitelwertzeiger, ruhende Scheitelwertzeiger und Effektivwertzeiger transformiert:

$i(t) = \hat{\imath} * \cos(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \underline{i}(t) = \hat{\imath} * e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \hat{\imath} * e^{j\omega t} * e^{j\varphi_i}$

$\rightarrow \underline{\hat{\imath}} = \hat{\imath} * e^{j\varphi_i}$

$\rightarrow \underline{I} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_i} = I * e^{j\varphi_i}$

$u(t) = R * \hat{\imath} * \cos(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \underline{u}(t) = R * \hat{\imath} * e^{j(\omega t + \varphi_i)} = R * \hat{\imath} * e^{j\omega t} * e^{j\varphi_i}$

$\rightarrow \underline{\hat{u}} = R * \hat{\imath} * e^{j\varphi_i}$

$\rightarrow \underline{U} = \frac{R * \hat{\imath}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_i} = U * e^{j\varphi_i}$

Das ohmsche Gesetz für Gleichstrom lautet:

$$R = \frac{U}{I}$$

Für Wechselstrom wird definiert:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{\imath}}} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$$

Für verschiedene Elemente (R, L, C) und Schaltungen soll das Z später unter sucht werden. Z wird der komplexe Widerstand genannt. Für den Fall des ohmschen Widerstandes ergibt sich:

$$\underline{Z} = \frac{\frac{R * \hat{\imath}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_i}}{\frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_i}} = \frac{R * \hat{\imath} * e^{j\varphi_i}}{\hat{\imath} * e^{j\varphi_i}} = \frac{R * \hat{\imath} * e^{j\omega t} * e^{j\varphi_i}}{\hat{\imath} * e^{j\omega t} * e^{j\varphi_i}} = R$$

$\underline{Z} = = R * e^{j0^\circ}$	für ohmschen Widerstand

Allgemein (nicht bei R) ergibt sich mit

$\underline{U} = U * e^{j\varphi_u}$ und $\underline{I} = I * e^{j\varphi_i}$

der komplexe Widerstand

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} * e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z * e^{j\varphi_z}$$

mit dem Betrag $Z = \frac{U}{I}$

und der Phase $\varphi_z = \varphi_u - \varphi_i$

Der Winkel von Z gibt die Phasenverschiebung zwischen u(t) und i(t) an, dazu später mehr.

6.5.1.3. Leistung

Die zeitabhängige Leistung ergibt sich aus der Multiplikation der Zeitgrößen u(t) und i(t):

$p(t) = u(t)*i(t)$

$p(t) = [R*\hat{i}*\cos(\omega t + \varphi_i)]*[\hat{i}*\cos(\omega t + \varphi_i)]$

$p(t) = R*\hat{i}^2*[\cos(\omega t + \varphi_i)]^2$ $\qquad\qquad$ $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\alpha)]$

$$p(t) = R*\frac{\hat{i}^2}{2}*[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)]$$

Die Leistung P ergibt sich als Mittelwert über eine Periode der zeitabhängigen Leistung:

$$P = \overline{p(t)} = \frac{1}{T}\int_{(T)} p(t)\ dt$$

Durch genaues Hinsehen bei p(t), stellt man fest, daß der Term mit cos keinen Anteil am Mittelwert liefert. Somit ergibt sich:

$$P = R*\frac{\hat{i}^2}{2} = R*\left(\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}\right)^2 = R*I^2$$

Obere Ableitung war der Grund für die Einführung des Effektivwertes.

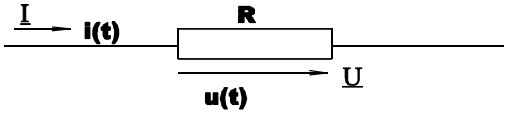
6.5.1.4. Grafische Darstellung der Größen

Für die gegebene Größe

$U = 100\ V$ $\qquad$ $\varphi_u = 0^\circ$ $\qquad$ und $\qquad$ $R = 50\ \Omega$

sind die zeitabhängigen Größen u(t), i(t) und p(t) in das Arbeitsblatt EGII-1 eingetragen, außerdem die komplexen Effektivwertzeiger von $\underline{U}$, $\underline{I}$, ,$\underline{Z}$ und $\underline{S}$. Der Zeiger $\underline{S}$ wird später in Kap. 6.5.11 erläutert.

Arbeitsblatt EGII-1 Elektrische Wechselgrößen an R



gegeben: U = 100 V
$\varphi_u = 0^\circ$
R = 50 Ω
f = 50 Hz

Bild EG651A

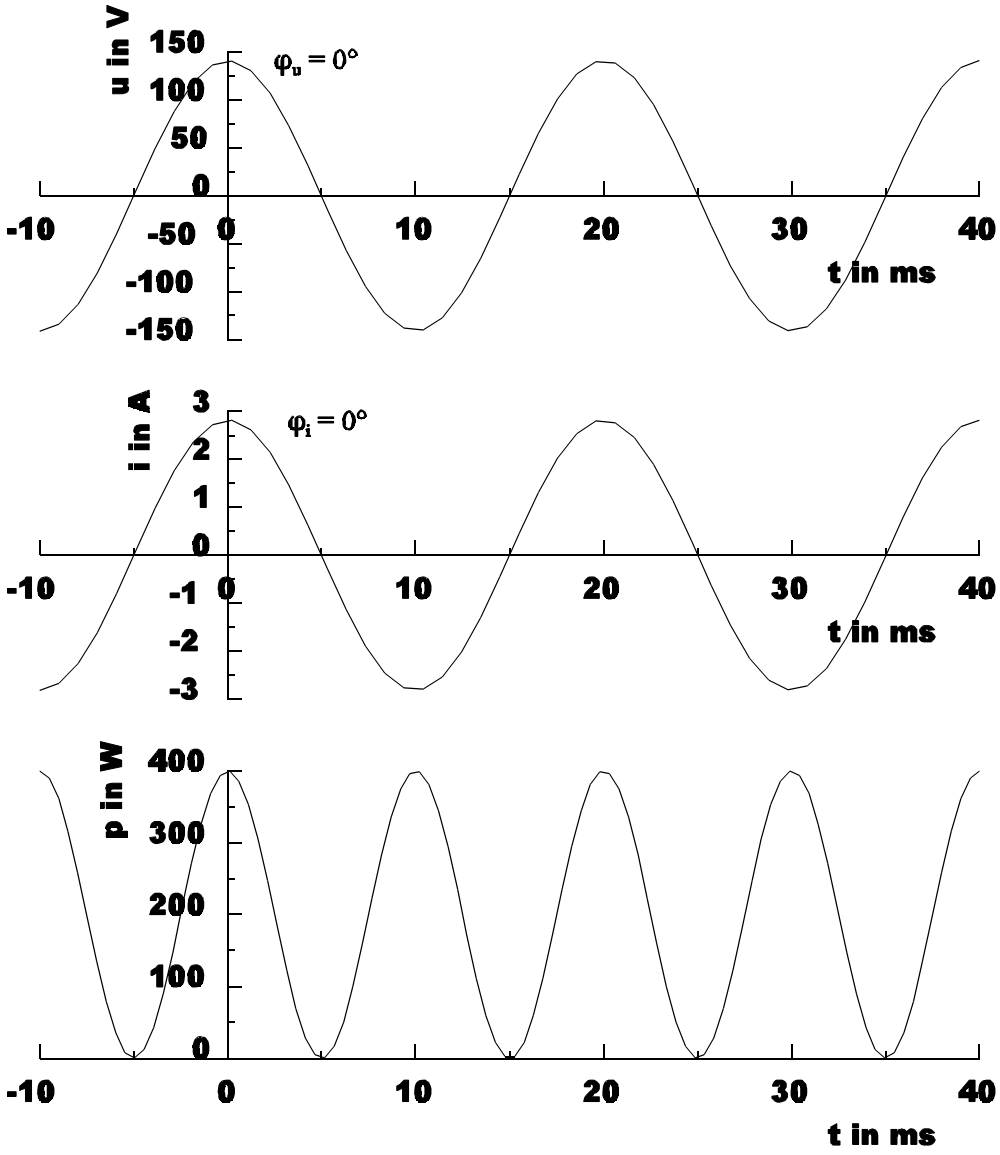
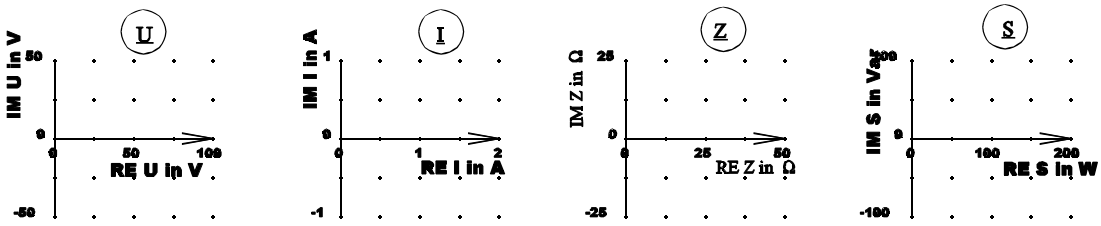


Bild EG6514A



$\varphi_u = 0$ $\varphi_i = 0$ $\varphi_Z = 0$ $\varphi_S = 0$

Bild EG6514B

6.5.2. Induktivität L

Eine ideale Induktivität (Drossel) wird durch den Induktionskoeffizienten L beschrieben.

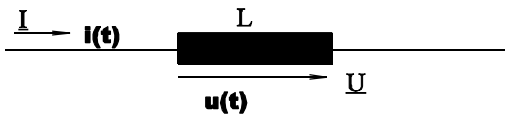


Bild EG652A

6.5.2.1. Zeitbereich

Im Kap. 9 (Magnetische Feld, 3. Semester) wird der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an der Induktivität erarbeitet. Hier soll der Zusammenhang nur angeben werden:

$$u = L * \frac{di}{dt}$$

Mit vorgegebenen Strom

$$i(t) = \hat{i} * \cos(\omega t + \varphi_i)$$

ergibt sich damit

$$u(t) = L * \frac{di}{dt} = -\omega * L * \hat{i} * \sin(\omega t + \varphi_i) = \omega * L * \hat{i} * \cos(\omega t + \varphi_i + 90^\circ)$$

Der Vergleich mit

$$u(t) = \hat{u} * \cos(\omega t + \varphi_u)$$

läßt erkennen:

$$\hat{u} = \omega * L * \hat{i} = X * \hat{i} \qquad \text{und} \qquad \varphi_u = \varphi_i + 90^\circ$$

mit der Definition:

$X = \omega * L$ - Reaktanz

Der Phasenverschiebungswinkel φ_{ui}

$$\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ$$

ist positiv und beträgt 90° (eine Vierteldrehung).

Fazit: An der Induktivität sind Strom und Spannung um 90° phasenverschoben. Die Beträge müssen mit dem Faktor $X = \omega * L$ multipliziert werden. Die Richtung der Verschiebung wird ausführlich in Kap. 6.5.4 diskutiert.

6.5.2.2. Komplexe Behandlung

Die Größen u(t) und i(t) werden in rotierende Scheitelwertzeiger, ruhende Scheitelwertzeiger und Effektivwertzeiger transformiert:

$i(t) = \hat{i} * \cos(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \underline{i}(t) = \hat{i} * e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \hat{i} * e^{j\omega t} * e^{j\varphi_i}$

$\rightarrow \underline{\hat{i}} = \hat{i} * e^{j\varphi_i}$

$\rightarrow \underline{I} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_i}$

$u(t) = X * \hat{i} * \cos(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) \rightarrow \underline{u}(t) = X * \hat{i} * e^{j\omega t} * e^{j\varphi_i} * e^{j90^\circ}$

$\rightarrow \underline{\hat{u}} = X * \hat{i} * e^{j\varphi_i} * e^{j90^\circ}$

$\rightarrow \underline{U} = \frac{X * \hat{i}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_i} * e^{j90^\circ}$

Hier wird auch der komplexe Widerstand Z gebildet:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{i}}} = \frac{\underline{\hat{u}}(t)}{\underline{\hat{i}}(t)}$$

$$\underline{Z} = \frac{\frac{X * \hat{i}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_i} * e^{j90^\circ}}{\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_i}} = \frac{X * \hat{i} * e^{j\varphi_i} * e^{90^\circ}}{\hat{i} * e^{j\varphi_i}} = \frac{X * \hat{i} * e^{j\omega t} * e^{j\varphi_i} * e^{j90^\circ}}{\hat{i} * e^{j\omega t} * e^{j\varphi_i}} = X * e^{j90^\circ}$$

$\underline{Z} = X * e^{j90^\circ} = jX$	für Induktivität L

Der komplexe Widerstand hat hier den Betrag X = ωL und den Winkel φ_z, der auch gleichzeitig $\varphi_z = \varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$ der Phasenverschiebungswinkel ist.

Beispiel:

gegeben: I = 2 A
$\varphi_i = 0^\circ$
f = 50 Hz
L = 0.1592 H

$$X = \omega * L = 2\pi * 50\,\frac{1}{s} * 0.1592\,\frac{Vs}{A} = 50\ \Omega$$

$i(t) = \sqrt{2} * 2\ A * \cos(\omega t + 0^\circ)$
$\underline{I} = 2\ A\ \underline{/0^\circ}$

$\underline{Z} = jX = j\ 50\ \Omega = 50\ \Omega\ \underline{/90^\circ}$

$\underline{U} = \underline{Z} * \underline{I} = j50\ \Omega * 2\ A\ \underline{/0^\circ} = 50\ \Omega\ \underline{/90^\circ} * 2A\ \underline{/0^\circ} = 100\ V\ \underline{/90^\circ}$

$u(t) = \sqrt{2} * 100\ V * \cos(\omega t + 90^\circ)$

Das Ergebnis ist auf Arbeitsblatt EGII-2 dargestellt.

6.5.2.3. Leistung

Die zeitabhängigen Größen u(t) und i(t) werden wieder zur Leistung multipliziert:

$$p(t) = u(t)*i(t)$$

$$p(t) = [-X*\hat{i}*\sin(\omega t + \varphi_i)]*[\hat{i}*\cos(\omega t + \varphi_i)]$$

$$\sin(\alpha)*\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$$

$$p(t) = -\frac{1}{2}X*\hat{i}^2*\sin(2\omega t + 2\varphi_i)$$

Die Leistung P als Mittelwert ergibt in diesem Fall Null

$$P = 0$$

weil positive und negative Anteile sich aufheben, siehe auch Arbeitsblatt EGII-2. Es liegt eine Leistungspendelung vor. Wenn sich der Strom betragsmäßig vergrößert $|di/dt| > 0$ wird Energie vom Netz entnommen und bei Abnahme des Strombetrages gibt die Induktivität die Energie wieder ab.

Energieversorgungsunternehmen (EVU) sind von solchen Leistungspendelungen nicht so begeistert und lassen sich diese bei Großabnehmern auch bezahlen. Es muß also ein Maß dafür gefunden werden. Dieses ist die Blindleistung Q. Für 90° Phasenverschiebung ($\varphi_{ui} = 90^\circ$) wird definiert:

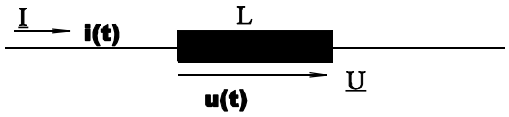
$$Q = U*I = X*I^2 = \frac{U^2}{X} = X*\left(\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Q ist somit der Faktor vor dem sin in der oberen Formel für p(t).

6.5.2.4. Grafische Darstellung der Größen

Wie auch am Widerstand, sollen die zeitabhängigen und komplexen Größen für ein Beispiel dargestellt werden, siehe Arbeitsblatt EGII-2.

Arbeitsblatt EGII-2 Elektrische Wechselgrößen an L



gegeben: I = 2 A
$\varphi_i = 0^\circ$
f = 50 Hz
L = 0.1592 H => X = 50 Ω

Bild EG652A

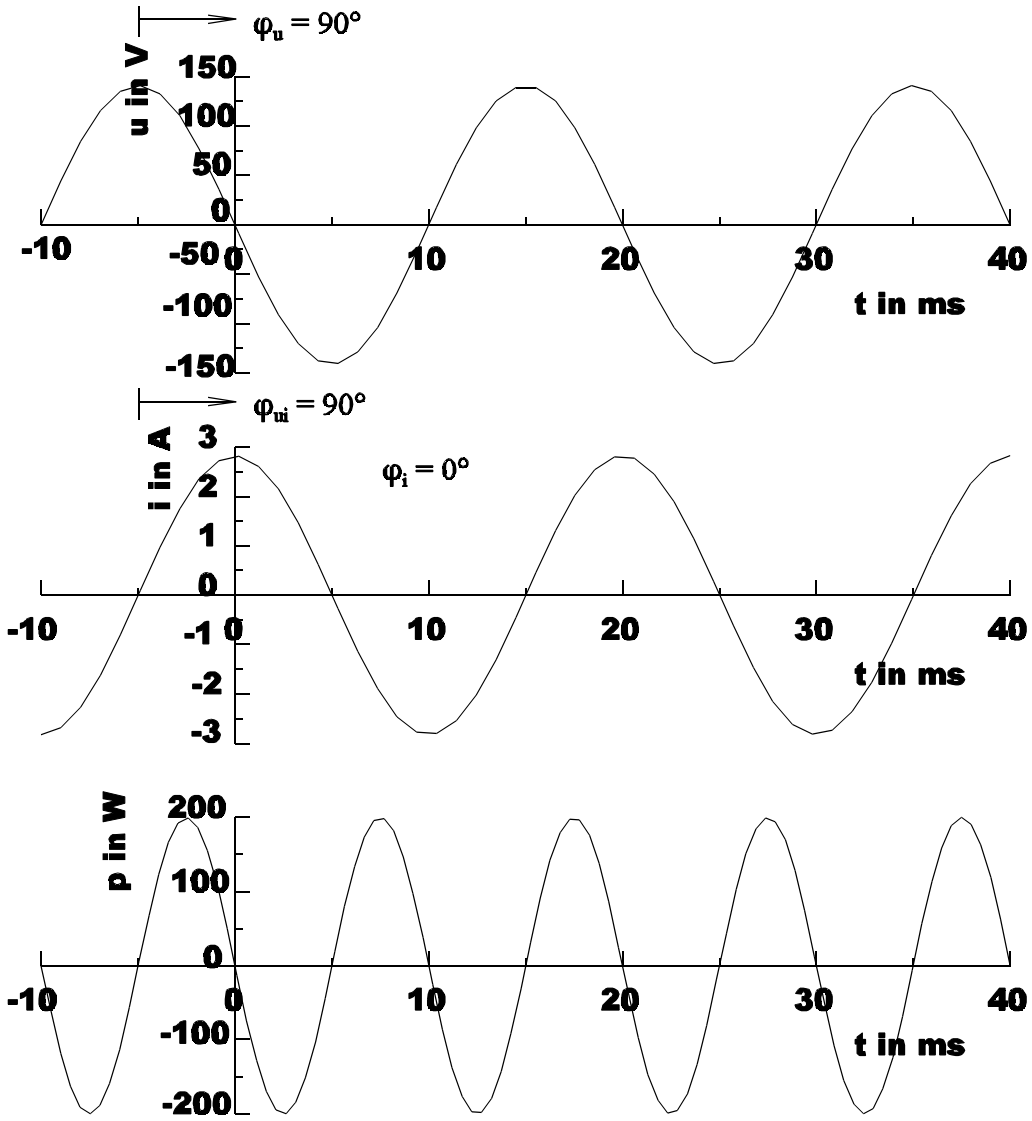
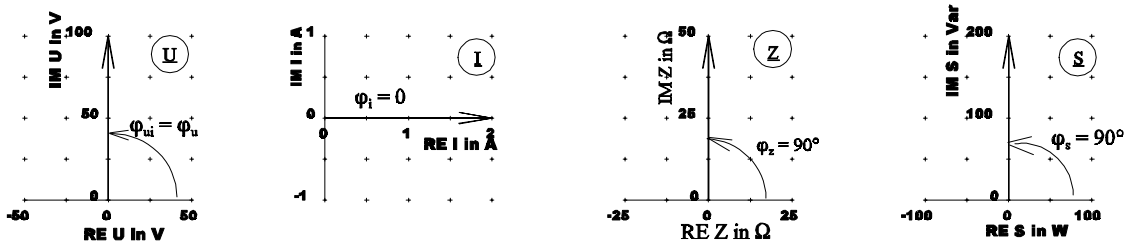


Bild EG6524A



$\varphi_u = 90^\circ$ $\varphi_i = 0^\circ$ $\varphi_z = \varphi_{ui} = 90^\circ$ $\varphi_S = \varphi_{ui} = \varphi_Z = 90^\circ$

Bild EG6524B

6.5.3. Kapazität C

Eine Kapazität (Kondensator) wird durch den Kapazitätskoeffizienten C beschrieben.

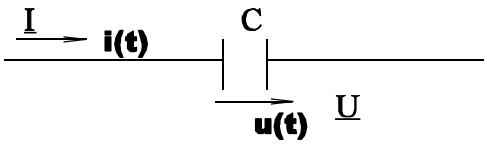


Bild EG653A

6.5.3.1. Zeitbereich

Im Kap. 8 (Elektrostatisches Feld, Ende 2. Semester) wird der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an der Kapazität erarbeitet. Hier soll nur der Zusammenhang angegeben werden:

$$i = C * \frac{du}{dt}$$

Mit vorgegebener Spannung

$$u(t) = \hat{u} * \cos(\omega t + \varphi_u)$$

ergibt sich für den Strom

$$i(t) = C * \frac{du}{dt} = -\omega * C * \hat{u} * \sin(\omega t + \varphi_u) = \omega * C * \hat{u} * \cos(\omega t + \varphi_u + 90^\circ)$$

Aus dem Vergleich mit

$$i(t) = \hat{\imath} * \cos(\omega t + \varphi_i)$$

erhält man:

$$\hat{\imath} = \omega * C * \hat{u} = B * \hat{u} \qquad \text{und} \qquad \varphi_i = \varphi_u + 90^\circ$$

mit der Definition

$B = \omega C$ - Blindleitwert

Der Phasenverschiebungswinkel φ_{ui}

$$\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i = -90^\circ$$

ist negativ und beträgt -90° (eine Vierteldrehung).

Fazit: An einer Kapazität sind Strom und Spannung um 90° phasenverschoben. Die Beträge müssen mit dem Faktor $B = \omega C$ multipliziert werden. Die Richtung der Verschiebung ist entgegengesetzt der an der Induktivität. Die Richtung der Verschiebung wird ausführlich in Kap. 6.5.4 diskutiert.

6.5.3.2. Komplexe Behandlung

Die Größen u(t) und i(t) werden in Effektivwertzeiger transformiert:

$$u(t) = \hat{u} * \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \rightarrow \quad \underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_u}$$

$$i(t) = \omega C * \hat{u} * \cos(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) \quad \rightarrow \quad \underline{I} = \omega C \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_u} * e^{j90^\circ}$$

Wiederum wird der komplexe Widerstand gebildet:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_u}}{\omega C \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_u} * e^{j90^\circ}}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{jB} = jX = \frac{1}{\underline{Y}} \qquad X = -\frac{1}{\omega C}$$

wobei $\underline{Y}$ der komplexe Leitwert als Kehrwert des komplexen Widerstandes definiert wird:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Blindleitwert B und Blindleitwert X (Reaktanz) wurden schon erläutert.

6.5.3.3. Leistung

Die zeitabhängige Leistung wird aus u(t) und i(t) berechnet:

$$p(t) = u(t) * i(t) = [\hat{u} * \cos(\omega t + \varphi_u)] * [\omega C * \hat{u} * \sin(\omega t + \varphi_u)]$$

$$p(t) = \omega C * \hat{u}^2 \frac{1}{2} * \sin(2\omega t + 2\varphi_u)$$

$$\sin(\alpha) * \cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$$

$$p(t) = B\left(\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}\right)^2 * \sin(2\omega t + 2\varphi_u)$$

Die Leistung p als Mittelwert gibt wiederum (wie bei der idealen Induktivität) Null. Es liegt eine Leistungspendelung vor. Wenn der Kondensator aufgeladen wird ($|du/dt| > 0$), ist eine positive Leistung vorhanden. Beim Entladen wird wieder Energie abgegeben und die momentane Leistung ist negativ.

Es muß auch hier wieder eine Blindleistung definiert werden aus U mal I. Da diese aber anders Vorzeichen hat, wird die Blindleistung für kapazitive Anteile negativ definiert: (90° Phasenverschoben)

$$Q = -U * I = -B * U^2 = -\frac{I^2}{B} = +X * I^2 = -B\left(\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}\right)^2$$

6.5.3.4. Grafische Darstellung der Größen

Beispiel:

gegeben: I = 2 A
$\varphi_i = 0^\circ$
f = 50 Hz
C = 63.66 µF => B = 0.02 S X = -50 Ω

$i(t) = \sqrt{2} * 2\ A * \cos(\omega t + 0^\circ)$

$\underline{I} = 2\ A\ \underline{/0^\circ}$

$\underline{Y} = j\omega C = j0.02\ S$

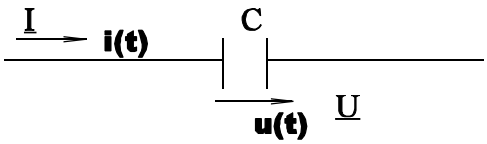
$\underline{Z} = -50\ j\Omega = 50\ \Omega\underline{/-90^\circ}$

$$U = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = \underline{Z} * \underline{I} = 50\ \Omega\underline{/-90^\circ} * 2\ A\underline{/0^\circ} = 100\ V\underline{/-90^\circ}$$

$u(t) = \sqrt{2} * 100\ V * \cos(\omega t - 90^\circ)$

Das Ergebnis ist auf Arbeitsblatt EGII-3 dargestellt. Die Phasenverschiebung wird in Kap. 6.5.4 erläutert.

Arbeitsblatt EGII-3 Elektrische Wechselgrößen an C



gegeben: $\underline{I} = 2\ A\angle 0^\circ$
$\varphi_i = 0^\circ$
f = 50 Hz
C = 63.66 µF => X = -50 Ω

Bild EG653A

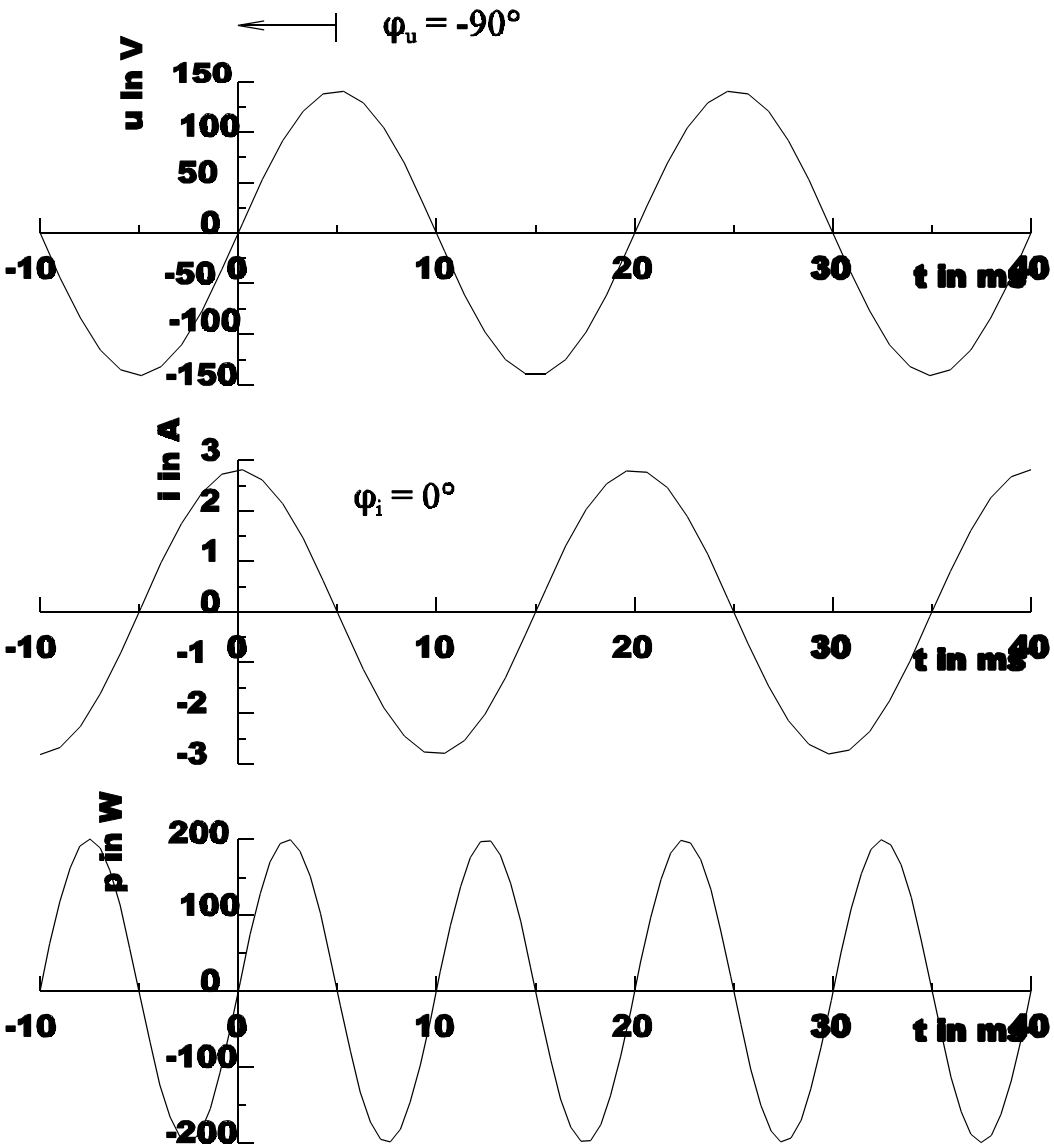
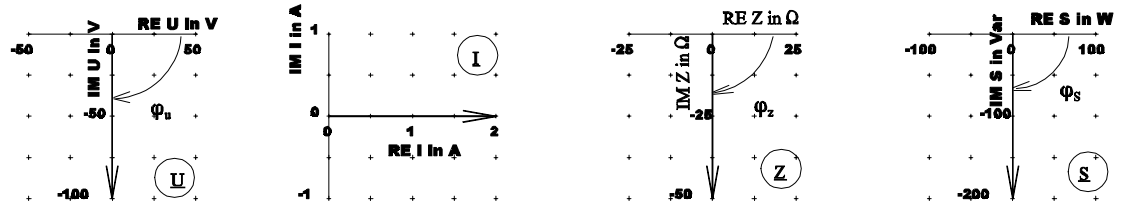


Bild EG6534A



$\varphi_u = -90^\circ$ $\varphi_i = 0^\circ$ $\varphi_z = \varphi_{ui} = -90^\circ$ $\varphi_S = \varphi_{ui} = \varphi_Z = -90^\circ$

Bild EG6534B

6.5.4. Phasenverschiebung

Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung soll anhand der Arbeitsblätter EGII-1, 2 und 3 diskutiert werden.

Widerstand R Arbeitsblatt EGII- 1
Am Widerstand ist keine Phasenverschiebung zwischen u(t) und i(t) vorhanden

$$\varphi = \varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i = 0^\circ = \varphi_Z$$

Auch der komplexe Widerstand $\underline{Z}$ hat den gleichen Phasenwinkel und ist rein reell.

Induktivität L und Kapazität C Arbeitsblätter EGII- 2 und 3
An beiden Elementen ist die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung vom Betrag her 90° und das Vorzeichen ist unterschiedlich. Hier tritt die Frage auf, was ist voreilend und was ist nacheilend. Da gibt es vier verschiedene Möglichkeiten dieses zu erklären

A] Physikalische Erklärung
B] Mathematische Erklärung
C] Erklärung im Zeitbereich
D] Erklärung anhand komplexen Zeiger
E] Eselsbrücke

A] Physikalische Erklärung

Induktivitäten und Kapazitäten sind Energiespeicher. Die momentan gespeicherte Energie läßt sich berechnen mit (Ableitung später in Kap. 8 und 9):

$$W_L = \frac{1}{2} L * i^2(t) \qquad W_C = \frac{1}{2} C * u^2(t)$$

Beim Kondensator ist die Energie von der Spannung abhängig und bei der Induktivität vom Strom. Ein physikalisches Grundprinzip ist, daß sich makroskopische energiebehaftete Größen nur stetig ändern können. Bei einer sprungförmigen Veränderung der Energie tritt eine unendliche Leistung p = dW/dt auf. Ein anschauliches Beispiel aus der Mechanik ist die träge Masse. Die energiebehafteten Größen Geschwindigkeit und Weg können sich nicht sprungförmig verändern. Die Anregung ist in diesem Fall eine Kraft. Die Wirkung Geschwindigkeit ändert sich langsamer als die Anregung Beschleunigung. Die Wirkung tritt somit später auf und ist somit nacheilend.

Fazit: Die energiebehaftete Größe ist nacheilend.

Induktivität	**Kapazität**
Energie ist von i abhängig	Energie ist von u abhängig
i eilt u um 90° nach	u eilt i um 90° nach
u eilt i um 90° voraus	i eilt u um 90° voraus

B] Mathematische Erklärung

Die mathematische Erklärung erfolgt mit Hilfe des Phasenverschiebungswinkel:

$\varphi_{ui} = \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_Z$

Induktivität L	$\varphi_{ui} = 90^\circ$	$\varphi_{ui} > 0$ =>	u eilt i voraus	i eilt u nach
Kapazität C	$\varphi_{ui} = -90^\circ$	$\varphi_{ui} < 0$ =>	u eilt i nach	i eilt u voraus
Widerstand R	$\varphi_{ui} = 0$		u und i in Phase	

C] Erklärung im Zeitbereich

Hier muß man feststellen, wann ein Ereignis auftritt. Was kann man sich bei einer Schwingung als Ereignis vorstellen? Da gibt es mehrere Möglichkeiten: z.B. Nulldurchgang oder Maximum. Da aber die Angabe des Phasenwinkels einer Schwingung vom Maximum der Schwingung zu t = 0 erfolgt, wird hier das Maximum betrachtet.

Induktivität

Bewegt man sich auf Arbeitsblatt EGII-2 in Richtung zunehmender Zeit (positive Zeitrichtung), kommt man bei $\varphi = -90^\circ$ auf das Maximum der Spannung und bei $\varphi = 0^\circ$ auf das Maximum des Stromes. Das Maximum des Stromes tritt zeitlich später auf als das der Spannung, daher ist der Strom nacheilend.

Kapazität

Bewegt man sich auf Arbeitsblatt EGII-3 in Richtung zunehmender Zeit, kommt man bei $\varphi = 0^\circ$ auf das Maximum des Stromes und bei $\varphi = 90^\circ$ auf das Maximum der Spannung. Damit eilt die Spannung dem Strom nach.

D] Erklärung anhand der komplexen Zeiger

Der Effektivwertzeiger wurde über den rotierenden Scheitelwertzeiger abgeleitet. Der rotierenden Scheitelwertzeiger bewegt sich in positiver mathematischer Winkelrichtung, siehe Bild EG654A.

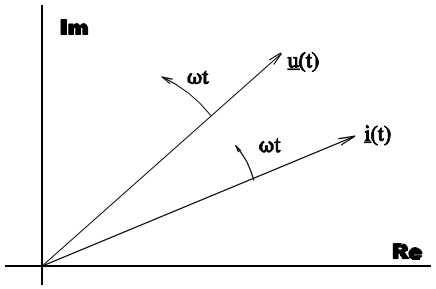


Bild EG654A

Einen bestimmten Phasenwinkel erreicht nach Bild EG654A die Spannung u(t) immer zu erst und danach erst i(t). D.h. der Strom eilt der Spannung nach.

Fazit: Der Zeiger mit dem größeren Phasenwinkel eilt voraus und der Zeiger mit dem kleineren Phasenwinkel eilt nach. Bewegt man sich in positiver Winkelrichtung, trifft man zuerst auf den nacheilenden Zeiger und danach auf den voreilenden.

Anwendung auf Arbeitsblätter EGII- 2 und 3

Induktivität	**Kapazität**
$\varphi_u = 90^\circ$	$\varphi_u = -90^\circ$
$\varphi_i = 0^\circ$	$\varphi_i = 0^\circ$
φ_u größer	φ_i größer
u voreilend	i voreilend
i nacheilend	u nacheilend

E] Eselsbrücke

Bei Induktivit**äten** die Ströme sich versp**äten**

6.5.5. Kirchhoffsche Gesetze bei Wechselstrom

Aus dem ersten Semester sind die Kirchhoffschen Gesetze für Gleichstrom bekannt:

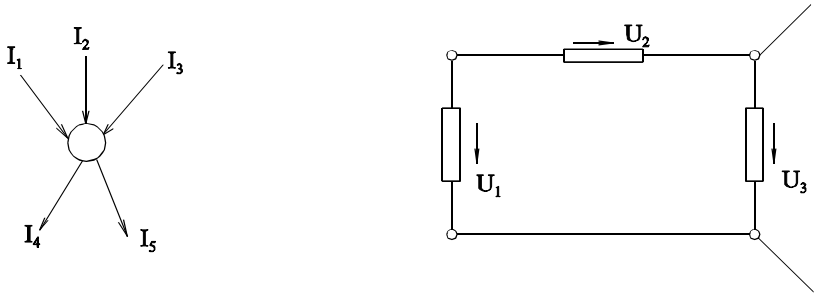


Bild EG655A

$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$ $\qquad$ $U_1 = U_2 + U_3$

$\sum_{\nu=1}^{n} I_\nu = 0$ $\qquad$ $\sum_{\nu=1}^{n} U_\nu = 0$

obere Gesetze gelten auch für Wechselstrom, nur anstatt der Gleichstromgrößen müssen zeitabhängige Größen eingesetzt werden.

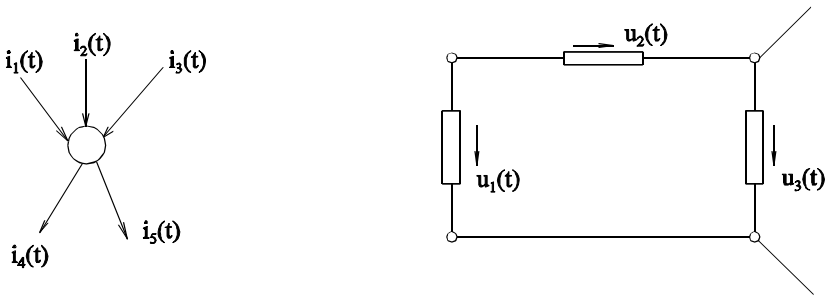


Bild EG655B

$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = i_4(t) + i_5(t)$ $\qquad$ $u_1(t) = u_2(t) + u_3(t)$

$\sum_{\nu=1}^{n} i_\nu(t) = 0$ $\qquad$ $\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu(t) = 0$

Da aber sich Additionen harmonischer Größen mit Hilfe der komplexen Rechnung ausführen lassen, gelten die Kirchhoffschen Gesetzt auch für komplexe Größen:

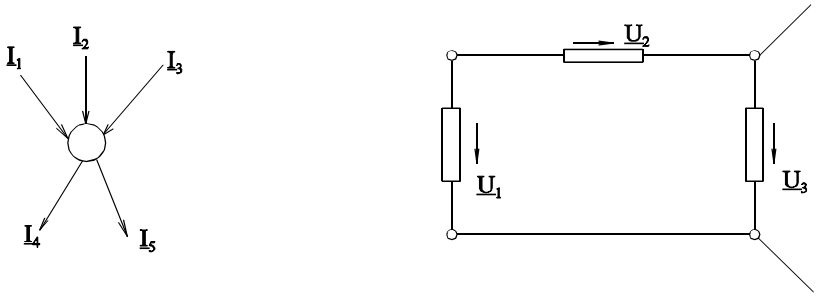


Bild EG655C

$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_4 + \underline{I}_5$ $\qquad$ $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{U}_3$

$\sum_{\nu=1}^{n} I_\nu = 0$ $\qquad$ $\sum_{\nu=1}^{n} U_\nu = 0$

6.5.6. Komplexe Behandlung von Spannungsquellen

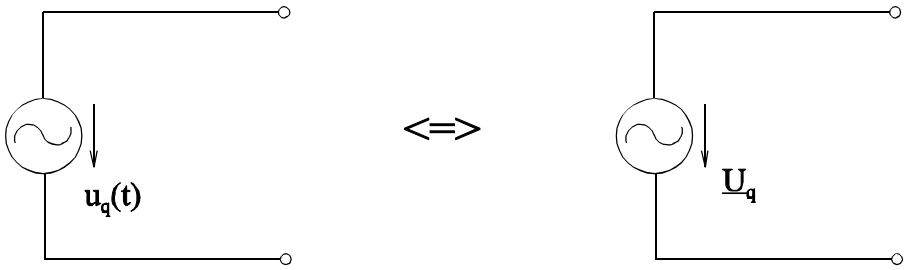


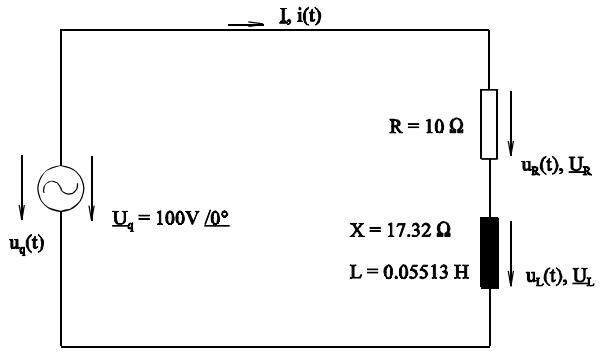
Bild EG656A

Die ideale Quelle nach Bild EG656A wird zur Vorbereitung auf komplexe Rechnung umgerechnet wie eine Spannung allgemein:

$$u_q(t) = \hat{u}_q * \cos(\omega t + \varphi_q) \quad <=> \quad \underline{U}_q = \frac{\hat{u}_q}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_q} = U_q * e^{j\varphi_q}$$

6.5.7. Reihenschaltung R-L

Für die Anordnung nach Bild EG657A sollen alle folgenden elektrischen Größen berechnet und dargestellt werden.



gegeben: $u_q(t)=141\ V*\cos(\omega t)$

$f = 50$ Hz

$R = 10\ \Omega$

$L = 0.05513$ H

Bild EG657A

$$X = \omega L = 2\pi * f * L = 2\pi * 50\frac{1}{s} * 0.05513\ \frac{Vs}{A} = 17.32\ \Omega$$

$$\underline{U}_q = \frac{141\ V}{\sqrt{2}} \underline{/0^\circ} = 100\ V \underline{/0^\circ}$$

Aus dem komplexen Maschenumlauf ergibt sich:

$\underline{U}_q = \underline{U}_R + \underline{U}_L$

Mit $\underline{U}_R = R*\underline{I}$ und

$\underline{U}_L = j\omega L\underline{I} = jX\underline{I}$

läßt sich angeben $\underline{U}_q = R*\underline{I} + jX\underline{I} = (R + jX)*\underline{I}$

Die Anteile R und L werden zusammengefaßt zum komplexen Widerstand

$$\underline{Z} = R + jX = (10 + j\,17.32)\Omega = 20\ \Omega\ \underline{/60^\circ}$$

Damit erhält man

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{R + jX} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}}$$

das ohmsche Gesetz in komplexer Form. Der Widerstand $\underline{Z}$ ist der Widerstand einer Reihenschaltung von R und jX. Wie bei Gleichstrom werden die Widerstände behandelt, nur komplex.

Für die Zahlenwerte des oberen Beispiels läßt sich berechnen:

$$\underline{I} = \frac{100\ V\underline{/0^\circ}}{20\ \Omega\underline{/60^\circ}} = 5\ A\underline{/-60^\circ}$$

Die Spannungsabfälle am R und L lassen sich nach dem ohmschen Gesetz berechnen:

$$\underline{U}_R = \underline{I}*R = 5\ A\ \underline{/-60^\circ} * 10\ \Omega\ \underline{/0^\circ} = 50\ V\ \underline{/-60^\circ}$$

$$\underline{U}_L = \underline{I}*jX = 5\ A\ \underline{/-60^\circ} * 17.32\ \Omega\ \underline{/90^\circ} = 86.6\ V\ \underline{/30^\circ}$$

Alle Größen in den Zeitbereich zurücktransformiert ergibt:

$u_q(t) = 141\ V*\cos(\omega t + 0^\circ)$

$u_R(t) = 70.7\ V*\cos(\omega t - 60^\circ)$

$u_L(t) = 122\ V*\cos(\omega t + 30^\circ)$

$i(t) = 7.07\ A*\cos(\omega t - 60^\circ)$

Auf Arbeitsblatt EGII- 4 sind die zeitabhängigen und komplexen Größen für das obere Beispiel dargestellt.

Betrachtung der Phasenverschiebung

Bei einer Quelle mit induktiver Belastung eilt der Strom i der Spannung U_q nach. Die Spannung an R und der Strom sind in Phase, siehe Kap. 6.5.1. Die Spannung an der Induktivität U_L eilt dem Strom i um 90° voraus.

Allgemeine Berechnung von Betrag und Phase

$\underline{U}_q = U_q\ \underline{/\varphi_q}$ oben: $\varphi_q = 0^\circ$

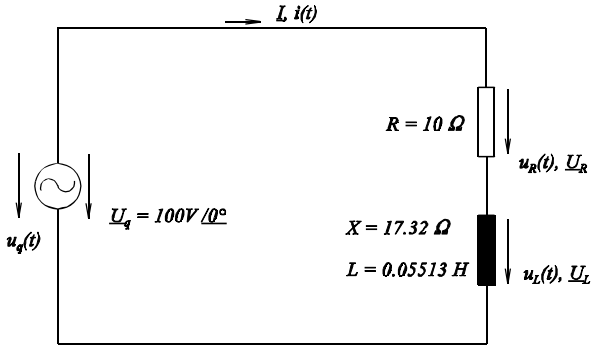
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{R + jx} = \frac{U_q\underline{/\varphi_q}}{\sqrt{R^2 + X^2}\underline{/\arctan\left(\frac{X}{R}\right)}}$$

$$\underline{I} = \frac{U_q}{\sqrt{R^2 + x^2}}\underline{/\varphi_q - \arctan\left(\frac{X}{R}\right)} = I*e^{j(\varphi_q - \varphi_i)}$$

$$I = \frac{U_q}{\sqrt{R^2 + x^2}} \qquad \varphi = \varphi_q - \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \varphi_q - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Mit der komplexen Rechnung lassen sich die Formeln für Betrag und Phase sehr schnell ableiten.

Arbeitsblatt EGII-4 Reihenschaltung R-L



Ergebnis: $\underline{I}$ = 5 A $\angle$-60°

$\underline{U}_R$ = 50 V $\angle$-60°

$\underline{U}_L$ = 86.6 V $\angle$30°

Bild EG657A

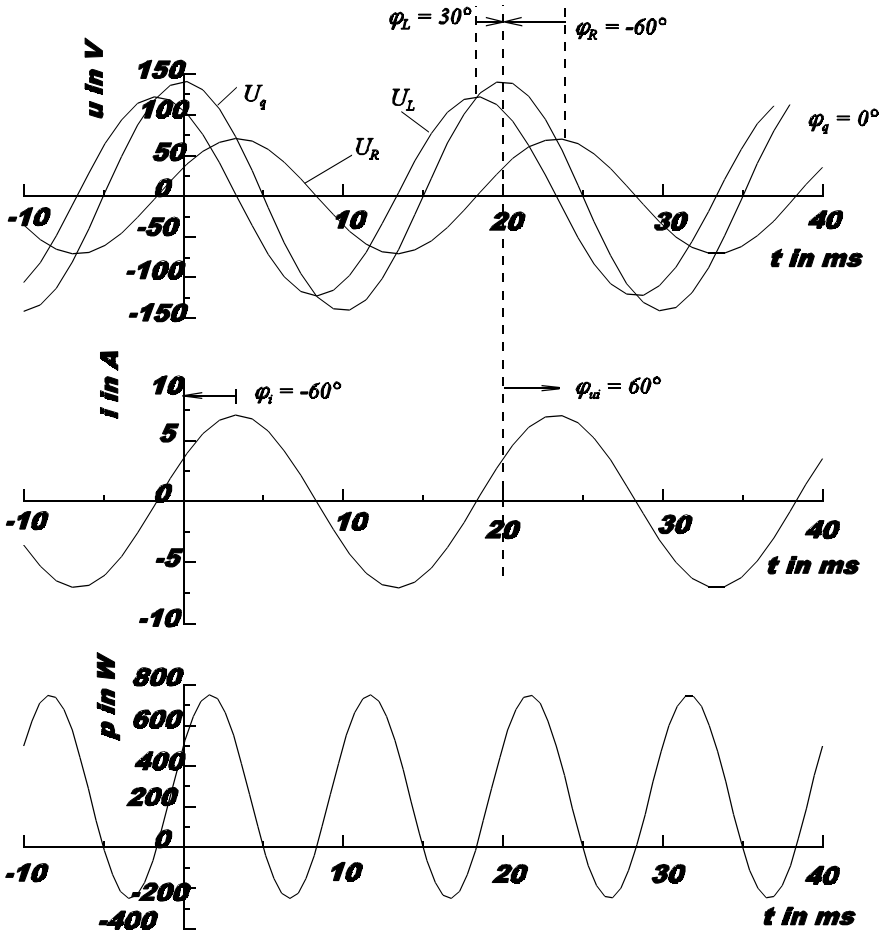
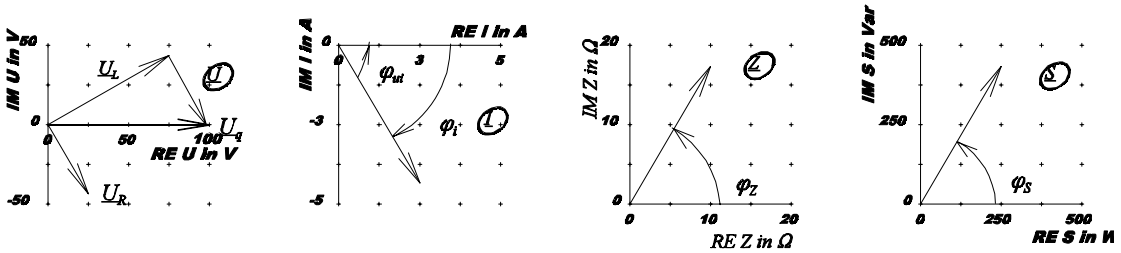


Bild EG567B



$\varphi_{ui} = 60°$
$\varphi_i = -60°$

$\varphi_Z = \varphi_q - \varphi_i = 40°$
$\varphi_Z = \varphi_{ui}$

$\varphi_S = \varphi_{ui} = \varphi_Z$

Bild EG657C

6.5.8. Reihenschaltung R-C

Für die Anordnung nach Bild EG658A sollen alle fehlenden elektrischen Größen berechnet und dargestellt werden

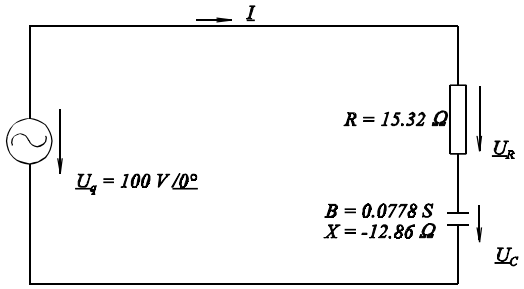


Bild EG658A

gegeben: $U_q(t) = 141\ V*\cos(\omega t)$

$f = 50\ HZ$

$C = 247.5\ \mu F$

$R = 15.32\ \Omega$

$$X = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi * 50\frac{1}{s} * 247.5 * 10^6\ \frac{As}{V}} = -12.86\ \Omega$$

$\underline{U}_q = 100\ V\ \underline{/0^\circ}$

$\underline{U}_q = \underline{U}_R + \underline{U}_C$

$\underline{U}_R = R*\underline{I}$

$$U_C = \frac{1}{j\omega C} * \underline{I} = \frac{1}{jB}\underline{I} = jX * \underline{I}$$

$\underline{U}_q = R*\underline{I} + jX\underline{I} = (R + jX)*\underline{I}$

Auch hier gilt wieder

$\underline{Z} = R + jX$ mit $jX = \frac{1}{j\omega C}$ $X = -\frac{1}{\omega C}$

$\underline{Z} = 15.32\ \Omega - j\ 12.86\ \Omega = 20\ \Omega\ \underline{/-40^\circ}$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}} = \frac{100\ V\underline{/0^\circ}}{20\ \Omega\underline{/-40^\circ}} = 5\ A\underline{/40^\circ}$$

$\underline{U}_R = \underline{I}*R = 5\ A\ \underline{/40^\circ} * 15.32\ \Omega\ \underline{/0^\circ} = 76.6\ V\ \underline{/40^\circ}$

$\underline{U}_C = \underline{I}*jX = 5\ A\ \underline{/40^\circ} * 12.86\ \Omega\ \underline{/-90^\circ} = 64.3\ V\ \underline{/-50^\circ}$

Alle Größen in den Zeitbereich zurück transformiert ergibt:

$u_q(t) = 141\ V*\cos(\omega t + 0^\circ)$

$u_R(t) = 108\ V*\cos(\omega t + 40^\circ)$

$u_C(t) = 91\ V*\cos(\omega t - 50^\circ)$

$i(t) = 7.07\ A*\cos(\omega t + 40^\circ)$

Auf Arbeitsblatt EGII-5 sind die zeitabhängigen und komplexen Größen für das obere Beispiel dargestellt.

Betrachtung der Phasenverschiebung

Bei einer Quelle mit kapazitiver Belastung eilt die Spannung U_q dem Strom i nach. Die Spannung an R und der Strom an R sind in Phase, siehe Kap. 6.5.1. Die Spannung an C eilt dem Strom nach, siehe Kap. 6.5.3.

Allgemeine Betrachtung von Betrag und Phase

Mit

$$\underline{U}_q = U_q \angle \underline{\varphi_q}$$

erhält man aus Kap. 6.5.7 für Betrag und Phase:

$$\underline{I} = \frac{U_q}{R + jX} = \frac{U_q \angle \varphi_q}{\sqrt{R^2 + X^2} \angle \arctan\frac{X}{R}}$$

$$I = \frac{U_q}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

$$X = -\frac{1}{B} = -\frac{1}{\omega C}$$

$$I = \frac{U_q}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad \varphi_i = -\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

$$\varphi_i = \varphi_q - \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \varphi_q + \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Arbeitsblatt EGII-5 Reihenschaltung R-C

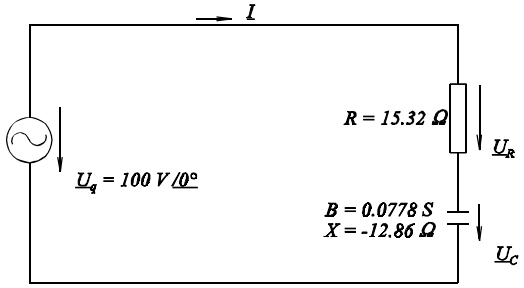


Bild EG658A

Ergebnis: $\underline{I}$ = 5 A $\angle 40^\circ$

$\underline{U}_R$ = 76.6 V $\angle 40^\circ$

$\underline{U}_C$ = 64.3 V $\angle -50^\circ$

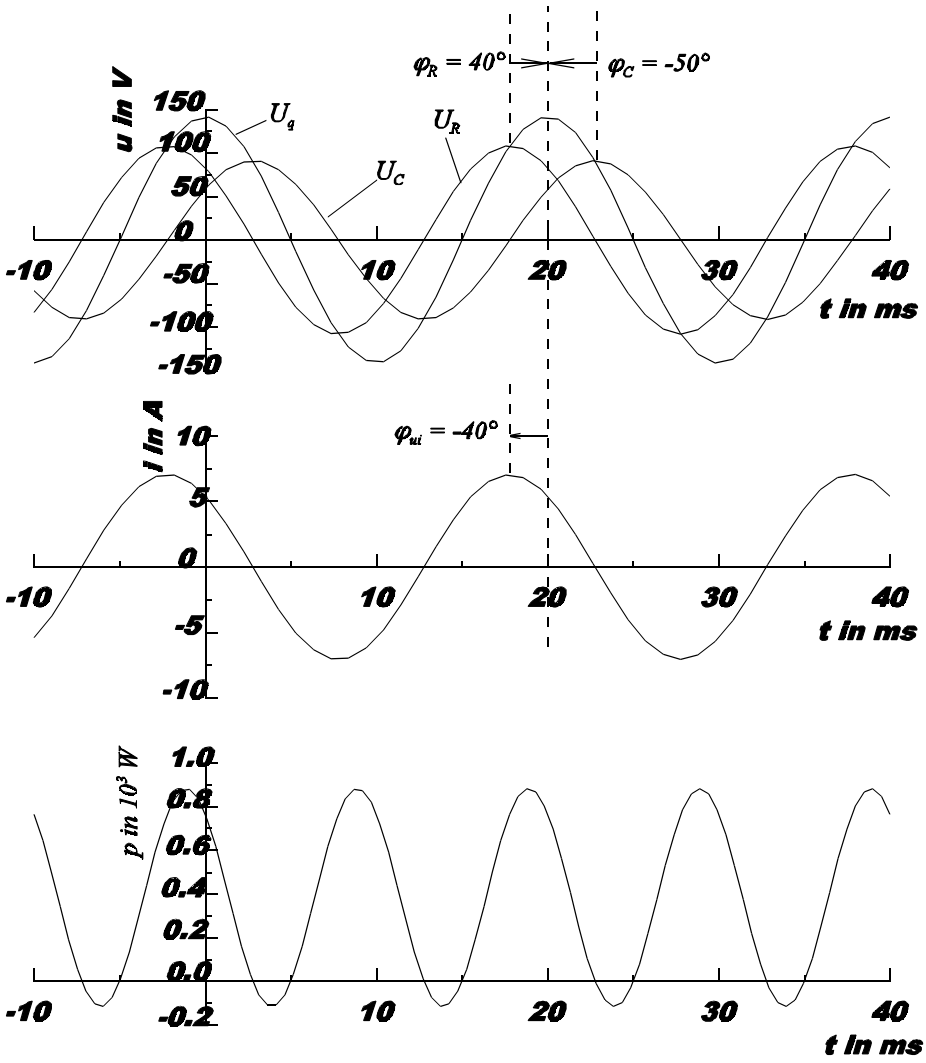
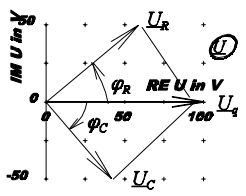
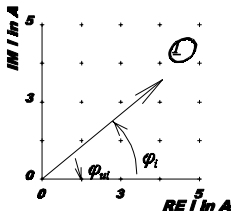
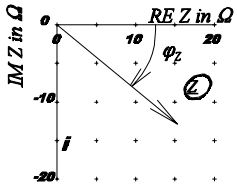
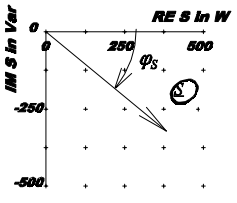


Bild EG658B







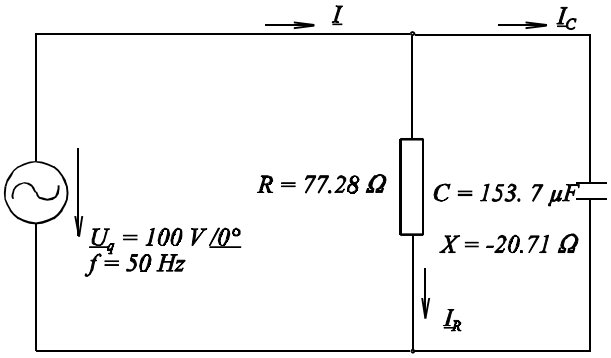


φ_C = -50° φ_i = 40° φ_Z = -40° φ_S = -40°

φ_{ui} = -40°

Bild EG658C

6.5.9. Parallelschaltung R-C



gegeben: U_q = 100 V

C = 153.7 µF

R = 77.28 Ω

Bild EG659A

$\underline{U}_q$ = 100 V $\angle 0^\circ$

G = (77.28 Ω)$^{-1}$ = 12.94 mS

$$B = -\frac{1}{X} = 48.29\,mS = \omega * C = 2\pi * 50\frac{1}{s} * 153.7 * 10^{-6}\frac{As}{V}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C = \frac{U_q}{R} + \frac{U_q}{\frac{1}{j\omega C}} = U_q * G + j\omega C * U_q$$

$\underline{I}$ = (G + jωC)$\underline{U}_q$ = (G + jB)$\underline{U}_q$

$I = \underline{Y} * \underline{U}_q$ $\underline{Y}$ - komplexer Leitwert $\underline{Y}$ = G + jB

$\underline{Y}$ = G + jB = 12.94 mS + j48.29 mS = 50 mS $\angle 75^\circ$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = 20\,\Omega\,\angle -75^\circ = 5.18\,\Omega - j19.32\,\Omega$$

$\underline{I} = \underline{U}_q * \underline{Y}$ = 100 V $\angle 0^\circ$ * 50 mS $\angle 75^\circ$ = 5 A $\angle 75^\circ$

$\underline{I}$ = (1.294 A + j4.829 A)

auch: $\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}}$

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_q}{R} = \frac{100\,V\angle 0^\circ}{77.28\,\Omega\angle 0^\circ} = 1.294\,A\ \angle 0^\circ$$

$\underline{I}_C = \underline{U}_q * jB$ = 100 V $\angle 0^\circ$ * 48.28 mS $\angle 90^\circ$ = 4.828 A $\angle 90^\circ$

Damit erfüllt: $\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C$

Zurücktransformiert in den Zeitbereich ergibt sich: $u_q(t) = 141\ V * \cos(\omega t + 0^\circ)$

$i_R(t) = 1.82\ A * \cos(\omega t + 0^\circ)$

$i_C(t) = 6.83\ A * \cos(\omega t + 90^\circ)$

$i(t) = 7.07\ A * \cos(\omega t + 75^\circ)$

Anmerkungen zu Arbeitsblatt EGII-6

- alle Spannungen sind gleich
- Ströme können einzeln betrachtet werden
 - * Strom von R ist in Phase mit U
 - * Strom von C eilt der Spannung um 90° voraus
 - * Gesamtstrom ergibt sich aus der Addition von $i_R + i_C$
- Da eine kapazitive Last vorhanden ist, eilt die Spannung dem Gesamtstrom nach

Allgemeine Berechnung von Betrag und Phase

$$\underline{Y} = G + jB = \sqrt{G^2 + B^2} * \angle \arctan\left(\frac{B}{G}\right)$$

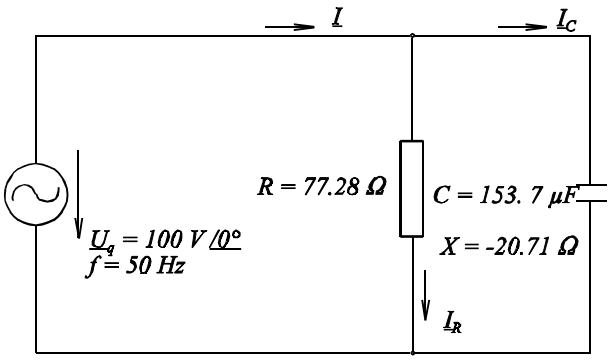
$$\underline{U}_q = U_q \angle \varphi_q$$

$$\underline{I} = \underline{U}_q * \underline{Y} = U_q \angle \varphi_q * \sqrt{G^2 + B^2} * \angle \arctan\left(\frac{B}{G}\right)$$

$$\underline{I} = U_q * \sqrt{G^2 + (\omega C)^2} * \angle \varphi_q + \arctan\left(\frac{\omega C}{G}\right) = I * \angle \varphi_i$$

$$I = U_q * \sqrt{G^2 + (\omega C)^2} \qquad \varphi_i = \varphi_q + \arctan\left(\frac{\omega C}{G}\right)$$

Arbeitsblatt EGII-6 Parallelschaltung R-C



Ergebnis: $\underline{I} = 5\ A\ \angle -75°$

Bild EG659A

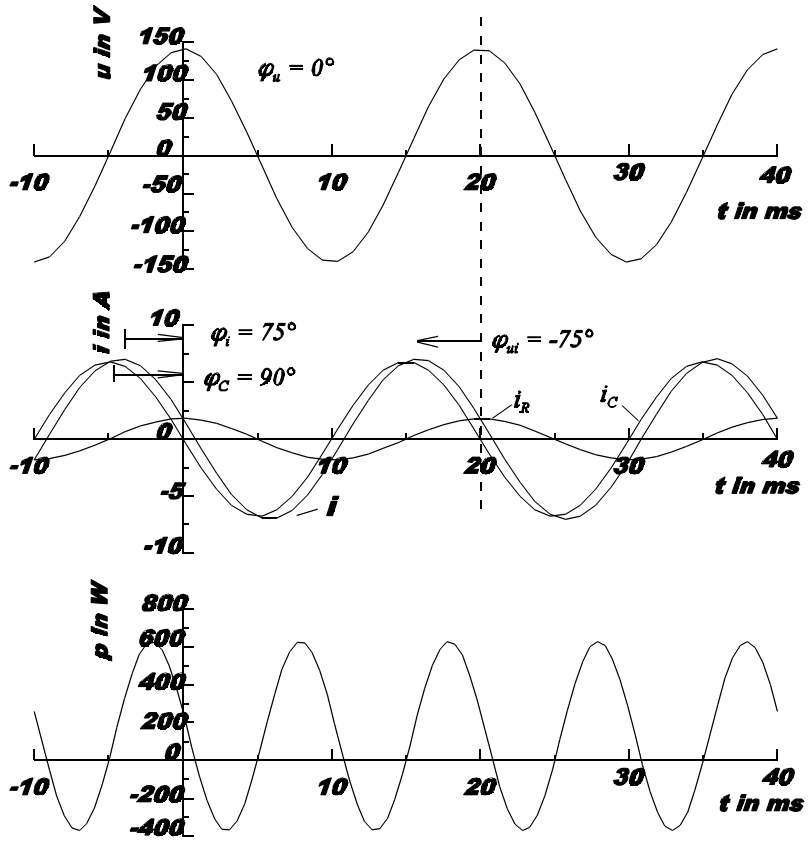
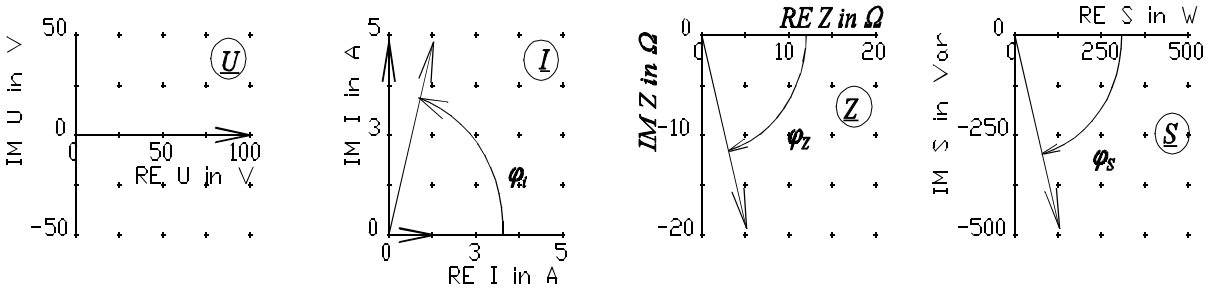


Bild EG659B



$\varphi_U = 0°$ $\varphi_i = 75°$

Bild EG659C

6.5.10. Komplexes ohmsches Gesetz, komplexer Widerstand und Leitwert

In den vorigen Kapiteln wurde schon abgeleitet:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \qquad \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \qquad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

In diesen Kapitel soll weniger das ohmsche Gesetz diskutiert werden, als vielmehr die Bestimmung des komplexen Widerstandes und des komplexen Leitwertes wiederholt werden.

Bei der Wechselstromrechnung hat man als passive Zweipole nur drei ideale Elemente:

- Widerstand R
- Induktivität L und
- Kapazität C

Wie ideale Quellen transformiert werden, ist in Kap. 6.5.6 aufgezeigt worden. Zur komplexen Behandlung von Schaltungen benötigt man eigentlich nur noch den Ansatz des komplexen Widerstandes für R, L und C:

R → $\underline{Z} = R$

L → $\underline{Z} = j\omega L$

C → $\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$

Damit evtl. einfacher gerechnet werden kann führt man folgende Begriffe ein:

Z	-	Scheinwiderstand, Impedanz
X	-	Blindwiderstand, Reaktanz
R	-	Wirkwiderstand, Resistanz
Y	-	Scheinleitwert, Admittanz
B	-	Blindleitwert, Suszeptanz
G	-	Wirkleitwert, Konduktanz

A] Ohmscher Widerstand R

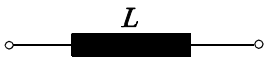
$\underline{Z} = R$



$\underline{Z} = R$ $\qquad \underline{Y} = G = \frac{1}{R}, \varphi_z = 0^\circ$

B] Induktivität L

$\underline{Z} = j\omega L$

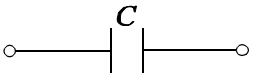


$\underline{Z} = j\omega L = jX = \frac{1}{jB}$

$X = \omega L$ $\qquad B = -\frac{1}{X}$ $\qquad B = -\frac{1}{\omega L}, \varphi_z = 90^\circ$

C] Kapazität C

$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$



$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{jB} = jX$

$B = \omega C$ $\qquad X = -\frac{1}{B}$ $\qquad X = -\frac{1}{\omega C}, \varphi_z = -90^\circ$

D] R-L-Reihenschaltung

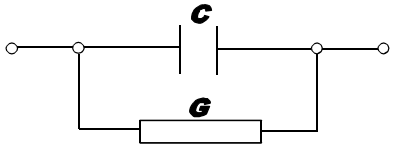
$\underline{Z} = R + j\omega L$



$\underline{Z} = R + j\omega L = R + jX = Z * e^{j\varphi}$

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ $\qquad \varphi_Z = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$

E] R-C-Parallelschaltung



$\underline{Y} = G + j\omega C = G + jB = Y * e^{j\varphi}$

$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ $\qquad \varphi_y = \arctan\left(\frac{B}{G}\right)$

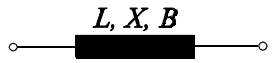
6.5.11. Leistung

6.5.11.1. Definition Leistung an R, L und C

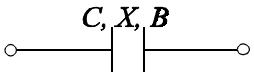
Wiederholung: Aus Berechnung an R und Definition an L und C ergibt sich



$$P = U*I = \frac{U^2}{R} = I^2*R$$



$$Q = U*I = \frac{U^2}{\omega L} = \frac{U^2}{X} = I^2*X = -U^2*B \qquad X = \omega L \qquad B = -\frac{1}{\omega L}$$



$$Q = -U*I = -U^2*\omega L = -U^2*B = -\frac{I^2}{B} = I^2*X \qquad X = \frac{-1}{\omega C} \qquad B = \omega C$$

Q > 0 induktive Blindleistung

Q < 0 kapazitive Blindleistung

[P] = W
[Q] = Var
[S] = VA

6.5.11.2. Leistung im Zeitbereich

Für $i(t) = \hat{i}*\cos(\omega t)$

ergibt sich an R und L die Spannung

$u_R(t) = \hat{u}*\cos(\omega t)$

$u_L(t) = -\hat{u}*\sin(\omega t)$

und die Leistung mit $p(t) = u(t)*i(t)$

$p_R(t) = \hat{i}*\hat{u}*\cos^2(\omega t)$ $\quad$ $p_L(t) = -\hat{i}*\hat{u}*\cos(\omega t)*\sin(\omega t)$ (A)

Aufgrund des Leistungsverlaufes (Kap. 6.5.1 und Kap. 6.5.2) können eine Wirkleistung berechnet und eine Blindleistung definiert werden:

$$P = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} * \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \qquad Q = \frac{\hat{i}}{2} * \frac{\hat{u}}{2}$$

$P = I*U$ $\quad$ $Q = I*U$

Obere Formeln gelten nur für $\varphi = 0^\circ$ oder $\varphi = 90^\circ$ Phasenverschiebung. Für eine allgemeine Phasenverschiebung mit ($\varphi_i = 0$, $\varphi_u = \varphi = \varphi_{ui}$)

$i(t) = \hat{i}*\cos(\omega t)$ $\quad$ und $\quad$ $u(t) = \hat{u}*\cos(\omega t + \varphi)$

wird die Leistung berechnet:

$p(t) = i(t)*u(t) = \hat{i}*\hat{u}*\cos(\omega t)*\cos(\omega t + \varphi)$

$p(t) = \hat{i}*\hat{u}*\cos(\omega t)*[\cos(\varphi)*\cos(\omega t) - \sin(\varphi)*\sin(\omega t)]$

$p(t) = \hat{i}*\hat{u}*\cos^2(\omega t)*\cos(\varphi) - \hat{i}*\hat{u}*\cos(\omega t)*\sin(\omega t)*\sin(\varphi)$

Der Vergleich mit den oberen idealen Zweipolen R und L -siehe Gleichung (A)- läßt erkennen, daß der erste Term in der oberen Gleichung einer Wirkleistung entspricht:

$P = U*I*\cos(\varphi) = U*I*\cos(\varphi_{ui})$

und der zweite Term einer Blindleistung:

$Q = U*I*\sin(\varphi) = U*I*\sin(\varphi_{ui})$

entspricht. Im allgemeinen Fall, wenn $\varphi_i \neq 0$ ist, muß $\varphi = \varphi_{ui}$ gesetzt werden.

6.5.11.3. Komplexe Leistung

Die Leistungskomponenten setzen sich aus Wirk- und Blindleistung zusammen. Die komplexe Leistung als Scheinleistung wird wie folgt definiert:

$$\underline{S} = P + jQ$$

Einsetzen der oberen Komponenten ergibt:

$$\underline{S} = U*I*\cos(\varphi_{ui}) + U*I \sin(\varphi_{ui})$$

$$\underline{S} = U*I*[\cos(\varphi_{ui}) + j \sin(\varphi_{ui})]$$

$$\underline{S} = U*I*e^{j\varphi_{ui}} = U*I*e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\underline{S} = U*e^{j\varphi_u}*I*e^{-j\varphi_i}$$

Die komplexe Leistung läßt sich mit Hilfe der komplexen Größe U und I ausdrücken

$$\underline{U} = U*e^{j\varphi_u} \qquad \underline{I} = \underline{I}*e^{j\varphi_i} \qquad \underline{I}^* = \underline{I}*e^{-j\varphi}$$

Damit ergibt sich die komplexe Leistung

$$\underline{S} = \underline{U}*\underline{I}^*$$

aus der komplexen Spannung multipliziert mit dem konjungiert komplexen Strom.

In Betragsschreibweise $\underline{S} = S*e^{j\varphi_S} = U*I*e^{j\varphi_{ui}}$

läßt sich ablesen $S = U*I$

$$\varphi = \varphi_S = \varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$$

Der Betrag der Scheinleistung ergibt sich aus dem Produkt der Beträge von Strom und Spannung. Der Winkel der Scheinleistung ist der Winkel von φ_{ui}.

Ersetzen des Stromes ergibt: $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{U}*\underline{Y}$ $\qquad \underline{I}^* = \frac{\underline{U}^*}{\underline{Z}^*} = U^**Y^*$

$$\underline{S} = \underline{U}*\underline{I}^* = \underline{U}*\underline{U}^**\frac{1}{\underline{Z}^*} = \underline{U}*\underline{U}^*\underline{Y}^* \qquad \underline{U}*\underline{U}^* = U^2$$

$$\underline{S} = \frac{U^2}{\underline{Z}^*} = U^2*\underline{Y}^*$$

Ersetzen der Spannung liefert: $\underline{U} = \underline{Z}*\underline{I}$

$$\underline{S} = \underline{U}*\underline{I}^* = \underline{Z}*I*I^* \qquad I*I^* = I^2$$

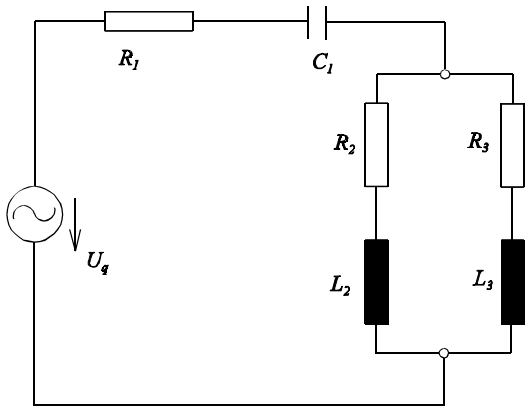
$$\underline{S} = \underline{Z}*I^2 = \frac{I^2}{\underline{Y}}$$

Damit läßt sich auch nachträglich die komplexe Leistung auf den Arbeitsblättern EGII-1 bis EGII-6 erklären.

6.5.11.4. Beispiel

In der folgenden Schaltung sind für jeden Zweig ν = 1...3 zu berechnen:

$u_\nu(t)$, $i_\nu(t)$, $\underline{U}_\nu$, $\underline{I}_\nu$, $\underline{S}_\nu$, P_ν, Q_ν, P_q, Q_q, S_q



$\underline{u}_q$ = 10 V cos(ωt)
R_1 = 50 Ω
C_1 = 0.3316 µF
R_2 = 80 Ω
L_2 = 3.183 mH
R_3 = 100 Ω
L_3 = 5.305 mH
f = 6 kHz

Bild EG65114A

$$\omega = 2\pi f = 2\pi * 6 * 10^3 \frac{1}{s} = 37.70 * 10^3 \frac{1}{s}$$

$$B_1 = \omega * C_1 = 37.70 * 10^3 \frac{1}{s} * 0.3316 * 10^{-6} \frac{As}{V} = 0.0125\,S$$

$$X_1 = \frac{1}{-B_1} = \frac{1}{-0.0125\,S} = -80\ \Omega$$

$$X_2 = \omega * L_2 = 37.70 * 10^3 \frac{1}{s} * 3.183 * 10^{-3} \frac{Vs}{A} = 120\,\Omega$$

$$X_3 = \omega * L_3 = 37.70 * 10^3 \frac{1}{s} * 5.305 * 10^{-3} \frac{Vs}{A} = 200\,\Omega$$

$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = (50 - j80)\Omega = 94.3\ \Omega\ \underline{/-57.99^\circ}$

$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = (80 + j120)\Omega = 144.2\ \Omega\ \underline{/56.31^\circ}$

$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3 = (100 + j200)\Omega = 223.6\ \Omega\ \underline{/63.43^\circ}$

$\underline{U}_q = 7.071\ V\ \underline{/0^\circ}$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 87.84\ \Omega\ \underline{/59.10^\circ}$$

$\underline{Z}_{123} = \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_1 = 95.22\ \Omega\ \underline{/-2.79^\circ}$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_{123}} = \frac{7.071\ V\underline{/0^\circ}}{95.22\ \Omega\underline{/-2.79^\circ}} = 74.26\ mA\ \underline{/2.79^\circ}$$

$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 * \underline{Z}_1 = 7.006\ \text{V}\ \underline{/-55.21^\circ}$

$\underline{U}_{23} = \underline{U}_q - \underline{U}_1 = 6.523\ \text{V}\ \underline{/61.89^\circ}$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = 45.23\ mA\underline{/5.58^\circ}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = 29.17\ mA\underline{/-1.55^\circ}$$

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 * \underline{I}_1^* = 520.3\ mVA\underline{/-57.99^\circ} = 276\ mW - j441\ mVar$$

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_{23} * \underline{I}_2^* = 295.0\ mVA\underline{/56.31^\circ} = 164\ mW + j245\ mVar$$

$$\underline{S}_3 = \underline{U}_{23} * \underline{I}_3^* = 190.3\ mVA\underline{/63.43^\circ} = 85\ mW + j170\ mVar$$

$$\underline{S}_q = \underline{U}_q * \underline{I}_1^* = 525.1\ mVA\underline{/-2.79^\circ} = 525\ mW - j26\ mVar$$

$P_1 = 276$ mW	$Q_1 = -441$ mVar	$S_1 = 520$ mVA
$P_2 = 164$ mW	$Q_2 = 245$ mVar	$S_2 = 295$ mVA
$P_3 = 85$ mW	$Q_3 = 170$ mVar	$S_3 = 190$ mVA
$P_q = 525$ mW	$Q_q = -26$ mVar	$S_q = 525$ mVA

$u_1(t) = 9.91\ \text{V} * \cos(\omega t - 55.21^\circ)$

$u_2(t) = 9.22\ \text{V} * \cos(\omega t + 61.89^\circ) = u_3(t)$

$i_1(t) = 105\ \text{mA} * \cos(\omega t + 2.79^\circ)$

$i_2(t) = 64.0\ \text{mA} * \cos(\omega t + 5.58^\circ)$

$i_3(t) = 41.3\ \text{mA} * \cos(\omega t - 1.55^\circ)$

Fazit: Wechselstromnetze können wie Gleichstromnetze berechnet werden, nur mit Hilfe der komplexen Rechnung

$R \rightarrow \underline{Z} = R$

$L \rightarrow \underline{Z} = j\omega L$

$$C \rightarrow \underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$$

$\sqrt{2} * U * \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \underline{U}\ \underline{/\varphi}$

Aufgabe 6.5.10, 6.5.11, 6.5.13 und 6.5.14 rechnen

6.6. Erweiterte Schaltungen

In diesem Abschnitt sollen Anwendungen von Wechselstrom-Schaltungen behandelt werden:

- Spannungsteiler
- Stromteiler
- Wechselstrombrücken
- Blindstromkompensation
- Leistungsanpassung
- Umwandlung Reihen- und Parallelschaltung

6.6.1. Spannungsteiler

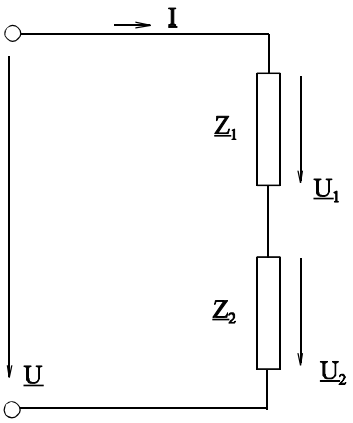


Bild EG661A

Die Spannungsteiler-Regel ist schon aus dem Gleichstromkreis bekannt. (Ableitung in ähnlicher Weise)

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 * \underline{I} = \underline{U} * \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 * \underline{I} = \underline{U} * \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$	$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$	$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$

Genau wie im Gleichstromkreis verhalten sich die Spannungen in einer Reihenschaltung entsprechend den Widerständen. Hier muß das Verhältnis der komplexen Spannungen und komplexen Widerstände berücksichtigt werden.

6.6.2. Stromteiler

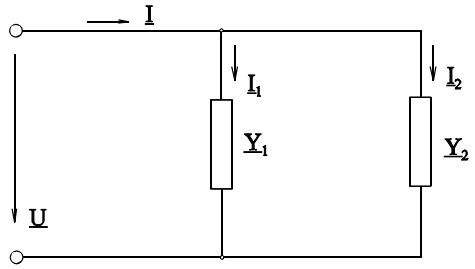


Bild EG662A

Auch die Stromteiler-Regel ist schon aus dem Gleichstromkreis bekannt.

$\underline{I}_1 = \underline{U}*\underline{Y}_1$ $\qquad\qquad$ $\underline{I}_2 = \underline{U}*\underline{Y}_2$

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{U}*(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)$

$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$	$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$	$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2}$

Auch hier verhalten sich die Ströme entsprechend den Leitwerten. Das Verhältnis der komplexen Ströme entspricht dem Verhältnis der zugehörigen komplexen Leitwerte.

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}} = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}}$$

$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$	$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2}$	$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$

6.6.3. Wechselstrombrücken

Anwendung: Bestimmung von realen Induktivitäten und Kapazitäten.

6.6.3.1. Komplexe Abgleichbedingung

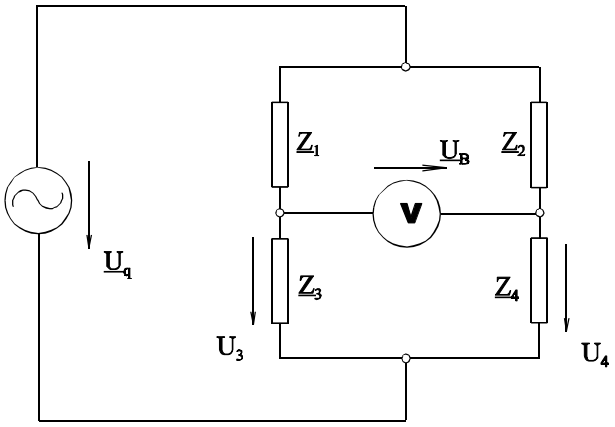


Bild EG6631A

Abgleichbedingung: $\underline{U}_B = 0$

$U_B = \underline{U}_3 - \underline{U}_4 = 0$

$\underline{U}_3 = \underline{U}_4$

$$U_q \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} U_q$$

$\underline{Z}_3 * \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 * \underline{Z}_4 = \underline{Z}_4 * \underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 * \underline{Z}_3$

$$\underline{Z}_2 * \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 * \underline{Z}_4$$

Wie auch bei der Brücke mit ohmschen Widerständen muß im abgeglichenen Zustand das Produkt der diagonalen Elemente gleich sein. **Für die Wechselstrombrücke gilt: Das Produkt der diagonalen komplexen Widerstände muß im abgeglichenen Zustand gleich sein.**

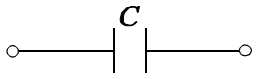
Die Abgleichbedingung gilt auch für den Kehrwert, den komplexen Leitwert:

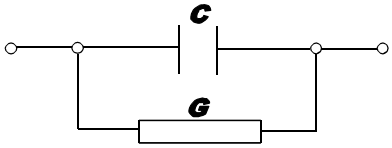
$$\underline{Y}_2 * \underline{Y}_3 = \underline{Y}_1 * \underline{Y}_4$$

6.6.3.2. Messung einer realen Kapazität

Ein Kondensator besteht aus zwei Platten, zwischen denen ein Dielektrikum (Nichtleiter) angeordnet ist. (Kap.8 dieses Semesters). Einen idealen Nichtleiter gibt es nicht. Daher ergibt sich das Ersatzschaltbild eines realen Kondensators aus der Parallelschaltung eines idealen Kondensators und eines Leitwertes (Widerstand):

ideale Kapazität **reale Kapazität**





$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\underline{Y}} \qquad \underline{Y} = G + j\omega C$$

Eine Möglichkeit, reale Kapazitäten zu messen ist die Wechselstrombrücke. Eine symmetrischen Anordnung der Brückenelemente, zeigt Bild EG6632A

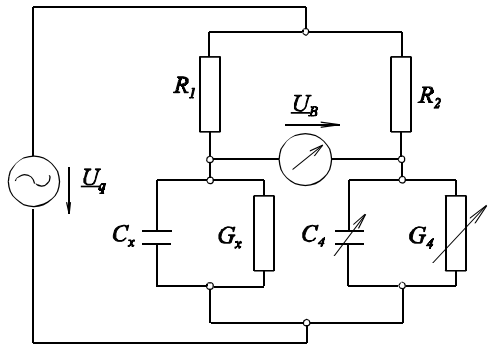


Bild EG6632A

Die Abgleichbedingung für die Brücke aus Bild EG6632A in Leitwertform lautet:

$$\underline{Y}_x * \frac{1}{R_2} = \underline{Y}_4 * \frac{1}{R_1}$$

$$\underline{Y}_x = \frac{R_2}{R_1}\,\underline{Y}_4$$

$\underline{Y}_x = G_x + j\omega C_x$ $\qquad$ $\underline{Y}_4 = G_4 + j\omega C$

$$G_x + j\omega C_x = \frac{R_2}{R_1}G_4 + \frac{R_2}{R_1}j\omega C_4$$

Eine komplexe Zahl ist nur dann gleich, wenn die Realteile und die Imaginärteile gleich sind. Daraus ergeben sich zwei Abgleichbedingungen, aus denen die gesuchten Elemente bestimmt werden können:

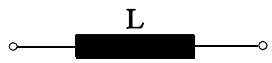
$$G_x = \frac{R_2}{R_1} * G_4 \qquad C_x = \frac{R_2}{R_1} * C_4 \qquad R_x = \frac{R_1}{R_2} * R_4$$

Bei der oberen Brücke müssen G_4 und C_4 variiert werden. Obere Brücke ist eine Schaltungsvariante. Es gibt zwar Kapazitätsdekaden, aber ohmsche Widerstände zu verändern, ist einfacher. Es werden dann in zwei verschiedenen Zweigen ohmsche Widerstände variiert und ein fester Kondensator in einen bekannten Zweig geschaltet.

6.6.3.3. Messung einer realen Induktivität

Eine reale Spule besteht aus Kupferwindungen mit ohmschen Verlusten. Diese werden im ESB durch einen zusätzlichen Spannungsabfall, also einen ohmschen Reihenwiderstand berücksichtigt.

ideale Induktivität



$\underline{Z} = j\omega L$

reale Spule



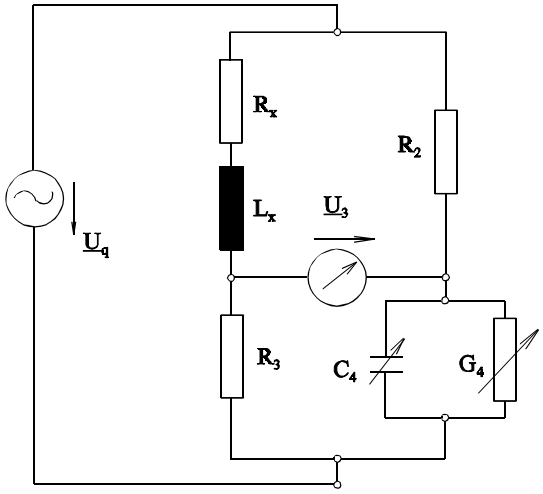
$\underline{Z} = R + j\omega L$

Es gibt verschieden Möglichkeiten eine Brücke zur Messung der realen Spulenparameter R und L aufzubauen, die sich in drei Kategorien einteilen lassen,

A] L und R im Nachbarzweig variieren
B] R und C im Diagonalzweig variieren
C] zwei R variieren, ein festes C
D] zwei R variieren, ein festes L

Variable Induktivitäten bei Methode A sind sehr schwer zu kalibrieren. Die Methode B oder C sind zu bevorzugen.

Beispiel zu Methode B:



$$\underline{Z}_x * \frac{1}{\underline{Y}_4} = R_2 * R_3$$

$\underline{Z}_x = \underline{Y}_4 * R_2 * R_3$

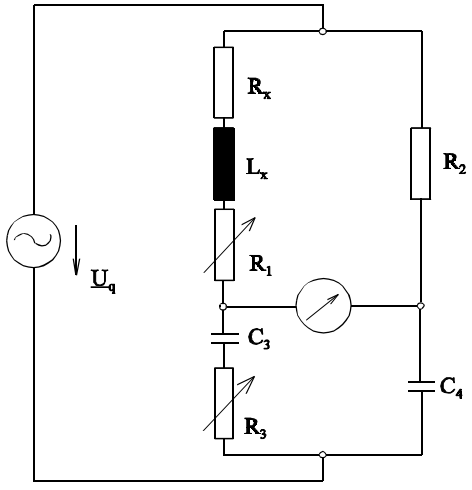
$\underline{Z}_x = R_x + j\omega L_x$ $\qquad$ $Y_4 = G_4 + j\omega C_4$

$R_x + j\omega L_x = R_2 * R_3 * (G_4 + j\omega C_4) = R_2 * R_3 * G_4 + R_2 * R_3 * j\omega C_4$

$R_x = R_2 * R_3 * G_4$ $\qquad$ $L_x = R_2 * R_3 * C_4$

Bild EG6633A

Beispiel zu Methode C:



$$\underline{Z}_1 * \frac{1}{\underline{Y}_4} = R_2 * \underline{Z}_3$$

$\underline{Z}_1 = R_x + j\omega L_x + R_1$

$$(R_x + R_1 + j\omega L_x)\frac{1}{j\omega C_4} = R_2\left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}\right)$$

$$R_x + R_1 + j\omega L_x = R_2 * R_3 * j\omega C_4 + R_2\frac{C_4}{C_3}$$

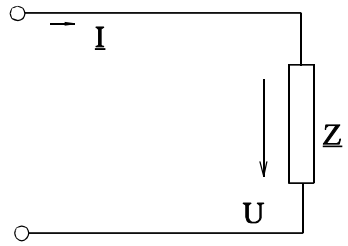
$$R_x = R_2\frac{C_4}{C_3} - R_1$$ $\qquad$ $L_x = R_2 * R_3 * C_4$

Bild EG6633B

6.6.4. Blindstromkompensation

Die meisten Verbraucher in der Energietechnik sind induktiver Art. Elektrische Maschinen haben Spulen und somit Induktivitäten, Leuchtstofflampen arbeiten mit induktiven Vorschaltgeräten und bei Großverbrauchern wirken die Zuleitungen als Induktivitäten. Die dabei auftretende positive Blindleistung erzeugt höhere Ströme, die bei Großabnehmern extra bezahlt werden müssen. Die Abhilfe wäre, eine negative Blindleistung zu addieren. Ist es möglich negative Blindleistung zu verbrauchen? Wie müßte der Verbraucher gewählt werden? Antwort: Kondensatoren verursachen negative Blindleistung.

Ein unkompensierter induktiver Verbraucher



$$\underline{Z} = Z * e^{j\varphi_z}$$

Bild EG664A

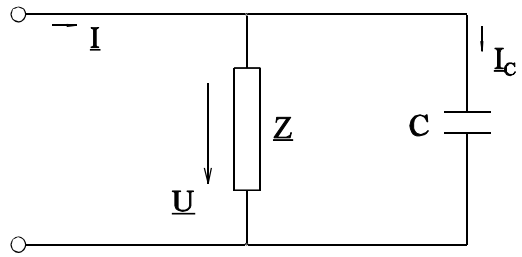
hat die Leistungskomponenten

$$\underline{S} = \underline{U} * \underline{I}^* = \underline{U} * \frac{\underline{U}^*}{\underline{Z}^*} = \frac{U^2}{Z * e^{-j\varphi}} = \frac{U^2}{Z} * e^{j\varphi_z}$$

$$\underline{S} = \frac{U^2}{Z}[\cos(\varphi_z) + j\sin(\varphi_z)] = P + jQ$$

$$P = \frac{U^2}{Z}\cos(\varphi_z) \qquad Q = \frac{U^2}{Z}\sin(\varphi_z)$$

Durch die Parallelschaltung eines Kondensators



$$\underline{Z} = Z * e^{j\varphi_z}$$

Bild EG664B

ergibt sich eine zusätzliche negative Blindleistungskomponente

$$\underline{S}_{ges} = \underline{S}_Z + \underline{S}_C$$

$$S_C = \underline{U}_C * \underline{I}_C^* = \underline{U} * (U * j\omega C)^* = -jU^2 * \omega C$$

$$S_{ges} = \frac{U^2}{Z}\cos(\varphi) + j\left[\frac{U^2}{Z}\sin(\varphi) - U^2 * \omega C\right]$$

Durch den negativen Anteil $-U^2\omega C$ wird die Blindleistung verringert. Grafisch verdeutlicht dieses die geometrische Addition des Bildes EG664C.

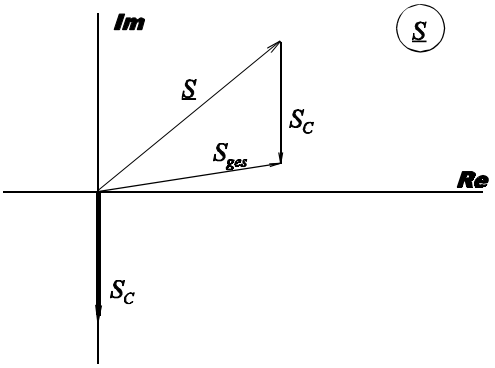


Bild EG664C

Falls der Phasenwinkel der Spannung U gleich Null ist, sehen die komplexen Zeiger (bei anderem Maßstab) für die Ströme gleich aus. Ströme und Leistungen überlagern sich. In der Praxis wird nicht zu 100 % kompensiert, meist bleibt ein kleiner induktiver Anteil erhalten.

Es gibt zwei Arten der Kompensation. Bei der **statischen Blindstromkompensation** wird wie bei Bild EG664B, ein Kondensator stationär zum Verbraucher parallel geschaltet. Bei der **dynamischen Blindstromkompensation** wird ein Kondensator stationär parallel geschaltet, siehe Bild EG664D:

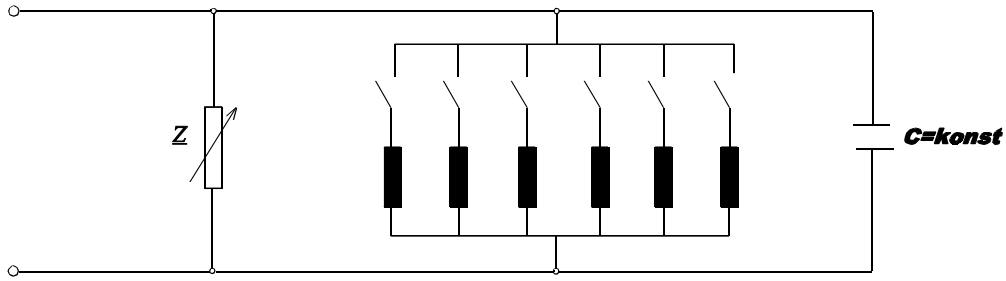


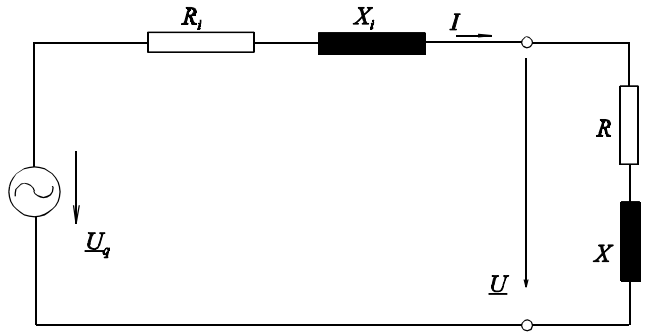
Bild EG664D

Zur Kompensation der veränderlichen Blindleistung werden zusätzliche Induktivitäten parallel geschaltet. Diese werden in Abhängigkeit der Blindleistung von Z zugeschaltet. Dadurch wird die negative Blindleistung von C teilweise wieder aufgehoben. Im dritten Semester (Einschaltvorgänge, Kap. 10) wird aufgezeigt, daß Induktivitäten sich leichter Einschalten lassen als Kapazitäten.

Aufgaben 6.6.5 rechnen

6.6.5. Leistungsanpassung

Das Problem der Leistungsanpassung ist auch schon vom Gleichstromkreis aus dem 1. Semester her bekannt (Kap. 4.5.3). Dort wurde eine Wirkleistungsanpassung vorgenommen. Jede reale Quelle hat einen komplexen Innenwiderstand mit Wirk- und Blindanteil. Bild EG665A zeigt eine Quelle mit Belastung.



R, X - Belastung

Bild EG665A

Die abgegebene Leistung an der Last

$$\underline{S} = \underline{U}^*\underline{I}^*$$

soll für die Anordnung nach Bild EG665A berechnet werden:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{(R_i + R) + j(X_i + X)}$$

$$\underline{I}^* = \frac{\underline{U}_q^*}{(R_i + R) - j(X_i + X)}$$

$$\underline{U} = (R + jX)*\underline{I} = \underline{U}_q\frac{R + jX}{(R_i + R) + j(X_i + X)}$$

$$\underline{S} = \underline{U}*\underline{I}^* = \underline{U}_q\frac{R + jX}{(R_i + R) + j(X_i + X)}*\frac{\underline{U}_q^*}{(R_i + R) - j(X_i + X)} \qquad \underline{U}_q*\underline{U}_q^* = U_q^2$$

$$\underline{S} = \frac{R + jX}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2}U_q^2$$

$$\underline{S} = U_q^2\frac{R}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2} + jU_q^2\frac{X}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2}$$

Der Vergleich mit S = P + jQ

liefert:

$$P = U_q^2\frac{R}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2} \qquad Q = U_q^2\frac{X}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2}$$

6.6.5.1. Wirkleistungsanpassung

Die Wirkleistung P soll angepaßt werden in Bezug auf die Parameter R und X. Es liegt ein Optimierungsproblem mit zwei Variablen vor.

Vorgehensweise:

A] Notwendige Bedingung: partielle Ableitungen gleich Null setzen
B] Mit den Werten unter A die hinreichenden Bedingungen überprüfen

A] Die partiellen Ableitungen nach X und R werden gebildet und gleich Null gesetzt

$$P_X = \frac{\partial P}{\partial X} = U_q^2 * R \frac{2(X_i + X)}{[(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2]^2} = 0$$

=> $X_i + X = 0$ => $X = -X_i$

$$P_R = \frac{\partial P}{\partial R} = U_q^2 \frac{(R + R_i)^2 + (X_i + X)^2 - R * 2(R + R_i)}{[(R + R_i)^2 + (X_i + X)^2]^2} = 0$$

=> $R^2 + 2R_i * R + R_i^2 - 2R^2 - 2R * R_i = 0$

=> $-R^2 + R_i^2 = 0$ => $R = \pm R_i$

Die Lösungen aufgrund der notwendigen Bedingungen $X = -X_i$ und $R = \pm R_i$ müssen noch mit den hinreichenden Bedingung überprüft werden. Dazu müßten die zweiten partielle Ableitungen gebildet werden.

Auf diese mathematische Herleitung des Beweises

$$\det 1 = P_{RR}(R = R_i, X = -X_i) < 0$$

$$\det 2 = \begin{vmatrix} P_{RR}(R=R_i, X=-X_i) & P_{RX}(R=R_i, X=-X_i) \\ P_{XR}(R=R_i, X=-X_i) & P_{xx}(R=R_i, X=-X_i) \end{vmatrix} > 0$$

soll hier aus Gründen des Aufwandes verzichtet werden.

Schneller ist die physikalische Erklärung zu erläutern. Es gilt:

$X = -X_i, R = 0$ => $P = 0$
$X = -X_i, R > 0$ => $P > 0$
$X = -X_i, R \to \infty$ => $P \to \infty$

zwischen den Werten R = 0 und $R = \infty$ ist ein Maximum vorhanden. Die Lösung $R_i=-R_i$ und $X=-X_i$ führt auf den technisch nicht möglichen Fall eines unendlichen Stroms. Diese Lösung scheidet somit aus.

Damit ergeben die Werte

$X = -X_i$ $R = R_i$ => Maximum der Wirkleitung

Das Maximum der Wirkleistung tritt bei gleichen ohmschen Widerstand als der Innenwiderstand auf, der Blindanteil muß negativ dem der Quelle gewählt werden.

6.6.5.2. Scheinleistungsanpassung

Der Betrag der Scheinleistung soll maximiert werden. Einfacher ist, daß Quadrat des Betrages zu maximieren:

$$S^2 = S * S^* = \frac{R^2 + X^2}{[(R_i + X)^2 + (X_i + X)^2]^2} U_q^4$$

Anwendung des gleichen Schemas als in Kap. 6.6.5.1 liefert als Ergebnis

$R = R_i \qquad X = X_i \qquad \Rightarrow \qquad S \rightarrow MAX$

Scheinleistungsanpassung bedeutet, der Verbraucher sollte den gleichen komplexen Widerstand aufweisen, als den der Spannungsquelle.

Eine Anwendung der Scheinleistungsanpassung in der Nachrichtentechnik ist der Abschluß mit Wellenwiderstand.

Aufgabe 6.6.7 rechnen

6.6.5.3. Leistungsanpassung an einem ohmschen Widerstand

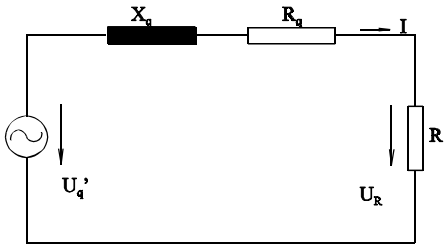


Bild EG6653A

Problem: Wirkleistungsmaximierung an R

$$I = \frac{U_q'}{\sqrt{X_q^2 + (R_q + R)^2}}$$

$$U_R = I * R = \frac{R}{\sqrt{X_q^2 + (R_q + R)^2}} U_q'$$

$$P = I * U_R = U_q'^2 \frac{R}{X_q^2 + (R_q + R)^2}$$

$$\frac{dP}{dR} = U_q'^2 \frac{[X_q^2 + (R_q + R)^2] * 1 - R * 2(R_q + R) * 1}{[X_q^2 + (R_q + R)^2]^2}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X_q^2 + R_q^2 + 2RR_q + R^2 - 2R_qR - 2R^2 = 0$$

$$X_q^2 + R_q^2 = R^2 \qquad R = \sqrt{X_q^2 + R_q^2}$$

Ein Problem (hauptsächlich der Elektrowärme) ist, bei einem größenteils induktiven Innenwiderstand (Zuleitung, Trafo) die Wirkleistung an einem ohmschen Widerstand R nach Bild EG6653A zu optimieren.

6.6.6. Umwandlung Reihenschaltung <=> Parallelschaltung

In manchen Fällen ist es vorteilhaft, eine Reihenschaltung in eine Parallelschaltung umzuwandeln und umgekehrt.

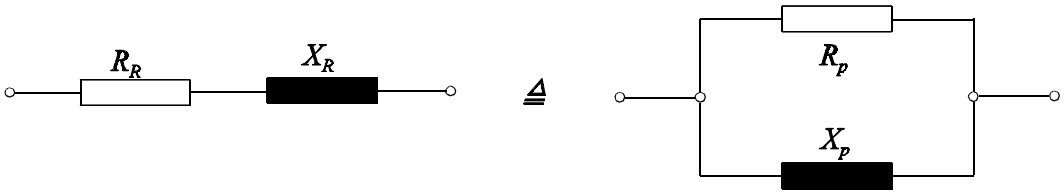


Bild EG666A

Blindwiderstände sind frequenzabhängig. Die Umwandlung der oberen Schaltung kann nur für eine bestimmte Frequenz durchgeführt werden. Die Bedingung der Umwandlung lautet: Beide Schaltungen sollen nach außen das gleiche Verhalten aufweisen. An den Klemmen muß der gleiche komplexe Widerstand vorhanden sein:

$$\underline{Z}_R = \underline{Z}_P$$

$$R_R + jX_R = \frac{jX_P * R_P}{R_P + jX_P} * \frac{R_P - jX_P}{R_P - jX_P}$$

$$R_R + jX_R = \frac{R_P * X_P^2}{R_P^2 + X_P^2} + j\frac{R_P^2 * X_P}{R_P^2 - jX_P^2}$$

$R_R = R_P * \frac{X_P^2}{R_P^2 + X_P^2}$	$X_R = X_P * \frac{R_P^2}{R_P^2 + X_P^2}$

Zur Bestimmung von R_P und X_P werden besser die komplexen Leitwerte gleich gesetzt:

$$\underline{Y}_R = \underline{Y}_P$$

$$\frac{1}{R_R + jX_R} = \frac{1}{R_P} + \frac{1}{jX_P}$$

$$\frac{1}{R_P} - j\frac{1}{X_P} = \frac{1}{R_R + jX_R} * \frac{R_R - jX_R}{R_R - jX_R} = \frac{R_R}{R_R^2 + X_R^2} - j\frac{X_R}{R_R^2 + X_R^2}$$

$R_P = \frac{R_R^2 + X_R^2}{R_R}$	$X_P = \frac{R_R^2 + X_R^2}{X_R}$

6.7. Frequenzabhängigkeit

Bislang ist davon ausgegangen worden, daß eine Wechselstromschaltung für die bestimmte Frequenz berechnet wird. In der Energietechnik braucht bei linearer Belastung der Stromkreis nur für f = 50 Hz betrachtet werden. In der analogen Nachrichtentechnik werden Informationen mit Hilfe von Abweichungen von einer Trägerfrequenz übermittelt. Die Aufgabe ist, zum einen die interessierenden Nachrichten mit Hilfe von Filtern aus einer Summe von Informationen wieder herauszufiltern. Zum anderen haben elektrische Signale eine gewisse Frequenzbreite. In den interessierenden Frequenzbereich muß die Übertragung der Nachricht betrachtet werden. Auch in der nichtlinearen Energietechnik muß die Auswirkung der Oberschwingungen betrachtet werden.

bisher	→	jetzt	$\omega = 2\pi f$
$\underline{Z}$	→	$\underline{Z}(\omega)$	
$\underline{U}$	→	$\underline{U}(\omega)$	
$\underline{I}$	→	$\underline{I}(\omega)$	
$\underline{S}$	→	$\underline{S}(\omega)$	

Für die betrachteten Größen soll in diesem Abschnitt die Frequenzabhängigkeit diskutiert werden. Üblich ist auch die Größen als Funktion von der Kreisfrequenz ω zu betrachten. Da es sich bei den oberen physikalischen Größen um komplexe Variable handelt, sind zwei Komponenten in Abhängigkeit eines reellen Parameters (meist ω) darzustellen. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten

- Betrag und Phase einzeln betrachten (Kap. 6.7.3)
- komplexe Größen als Ortskurve darstellen (Kap. 6.7.4)

Vorher sollen noch die Begriffe

- Übertragungsfunktion (Kap. 6.7.1)
- Logarithmisches Übertragungsmaß (Kap. 6.7.2)

diskutiert werden, da diese später wieder benötigt werden. Anwendung finden obere Methoden auch bei:

- Filter (Kap. 6.7.5)
- Schwingkreise (Kap. 6.7.6)

6.7.1. Frequenzgang und Übertragungsfunktion

6.7.1.1. Frequenzgang

Der Frequenzgang wird definiert als das Verhältnis von Ausgangsspannung zu Eingangsspannung.



$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)}$$

Bild EG6711A

Der Frequenzgang ist im allgemeinen von der Frequenz, bzw. Kreisfrequenz abhängig, üblich ist aber auch die Abhängigkeit von jω oder ω zu beschreiben.

Beispiel:

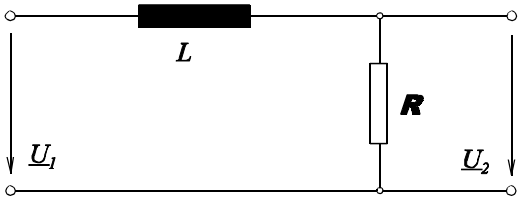


Bild EG6711B

Nach der Spannungsteilerregel läßt sich berechnen

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega L/R}$$

mit $\omega_e = R/L$

ergibt sich

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}$$

Weitere Anwendungen des Frequenzganges erfolgen in späteren Abschnitten. Dargestellt wird der Frequenzgang durch Ortskurven (Kap. 6.7.4) oder nach Betrag und Phase (Kap. 6.7.3).

6.7.1.2. Übertragungsfunktion

Der Frequenzgang untersucht nur das Verhalten im eingeschwungenen Zustand. Um das Übertragungsverhalten allgemein zu charakterisieren, z.B. bei Schaltvorgängen, (3. Semester, Kap. 10) wird eine komplexe Variable p eingeführt:

$$p = \sigma + j\omega$$

Im eingeschwungenen Zustand, welcher nur in EGII betrachtet wird, kann $\sigma = 0$ gleich Null gesetzt werden. Die Übertragungsfunktion erhält man, indem im Frequenzgang jω durch p ersetzt wird.

Frequenzgang	=>	Übertragungsfunktion		
$\underline{F}(j\omega)$	=>	$(j\omega \rightarrow p)$	→	F(p)

Für das Beispiel aus Kap. 6.7.1.1 erhält man:

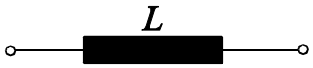
$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}$$

$$F(p) = \frac{1}{1 + p/\omega_e}$$

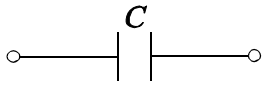
Für die drei Grundelemente können p-abhängige Widerstände eingeführt werden, in dem für jω gleich p gesetzt wird:



$\underline{Z} = R$ => $Z = R$



$\underline{Z} = j\omega L$ => $Z = pL$



$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$ => $Z = \frac{1}{pC}$

Reihen- und Parallelschaltungen sind wieder wie im Gleichstromkreis und wie bei komplexen Widerständen möglich. Auch Spannungsquellen lassen sich als Funktion von p angeben (Kap. 10, 3. Semester). Für die eingeschwungene Wechselstromrechnung ist es manchmal weniger aufwendig jω durch p zu ersetzen.

Beispiel:

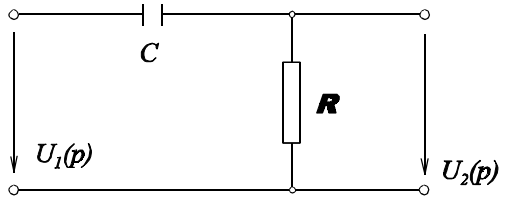


Bild EG6712A

$$F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{R}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{RpC}{1 + RpC}$$

$$\omega_e = \frac{1}{RC}$$

$$F(p) = \frac{p/\omega_e}{1 + p/\omega_e}$$

Hier könnte aus F(p) sofort wieder der Frequenzgang berechnet werden:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_e}{1 + j\omega/\omega_e}$$

Manchmal ist es einfacher mit p anstatt mit jω zu rechnen. Für Übertragungsfunktionen von linearen Netzwerken mit R, L und C ergeben sich immer gebrochen rationale Funktionen für die Übertragungsfunktion.

$$F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{b_m * p^m + b_{m-1} * p^{m-1} + ... + b_2 * p^2 + b_1 * p + b_0}{a_n * p^n + a_{n-1} * p^{n-1} + ... + a_2 * p^2 + a_1 * p + 1} \qquad m \le n$$

Übertragungsfunktionen und Widerstände in p werden wieder bei Einschaltvorgängen (3.Semester, Kap. 10) behandelt.

6.7.2. Logarithmisches Übertragungsmaß

Folgende Gründe lasen die Einführung eines logarithmischen Übertragungsmaßes ratsam erscheinen:

- Spannungsverhältnisse können mehrere Zehnerpotenzen überstreichen. Der Logarithmus als Verhältnisses hat dabei eine geringere Bandbreite.
- Mit $\underline{F}(j\omega)$ $F*e^{j\varphi}$ ergibt $\ln(\underline{F}) = \ln(F + j\varphi)$ die Aufspaltung nach Betrag und Phase.
- Bei einem Produkt $F = F_1*F_2$ kann bei Logarithmierung $\ln(F)=\ln(F_1)+\ln(F_2)$ die Multiplikation auf eine Addition zurückgeführt werden.

Die Definition des Übertragungsmaßes lautet:

$$F_{dB} = 20\,dB\,lg(F) = 20\,lg\left(\frac{U_2}{U_1}\right) = 10\,lg\left[\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2\right]$$

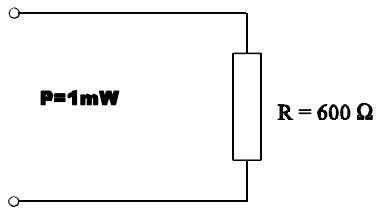
$$F_{dB} = 10\,dB\,lg(F_p) = 10\,lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

B - Bel $[F_{dB}]$ = dB = "dezi Bell"

Das Übertragungsmaß ist für Spannungen und Leistungen definiert. Da die Leistung proportional zu U^2 ist, ergibt sich logarithmiert dem Faktor "2".

DIN 5493

Elektrische Größen können nach DIN 5493 auch direkt im logarithmischen Maß angegeben werden. Dabei muß auf einen Bezugswert normiert werden. Der Bezugswert ist dabei ein ohmscher Widerstand von R = 600 Ω an den eine Leistung P = 1 mW umgesetzt wird. Die Einheit ist dann dBm.



$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = 1.29\,mA$$

$$U = \sqrt{R*P} = 0.775\,V$$

Bild EG672A

$$U_{dB} = 20\,dBm\,lg\frac{U}{0.775\,V}$$

$$I_{dB} = 20\,dBm\,lg\frac{I}{1.29\,mA}$$

$$P_{dB} = 10\,dBm\,lg\frac{P}{1\,mW}$$

Die Angabe in Neper hat sich noch nicht so durchgesetzt:

$$F_{Np} = 1\,Np*\ln\left(\frac{U_2}{U_1}\right)$$ Np - Neper

10 dB = 1.15 Np

1 Np = 8.869 dB

6.7.3. Darstellung nach Betrag und Phase

6.7.3.1. Lineare Darstellung

Auf Arbeitsblatt EGII-7 ist für sieben verschiedene Elemente bzw. Schaltungen der komplexe Widerstand nach Betrag und Phase dargestellt.

a) Widerstand R

$\underline{Z} = R$ $\qquad Z = R$ $\qquad \varphi = 0^\circ$

Der rein ohmsche Widerstand ist nicht frequenzabhängig.

b) Induktivität L

$\underline{Z} = j\omega L$ $\qquad Z = \omega L$ $\qquad \varphi = 90^\circ$

Der Phasenwinkel der idealen Induktivität ist unabhängig von der Frequenz 90°. Der Betrag des Scheinwiderstandes steigt linear mit der Frequenz an. Für f = 0 ist auch der Widerstand Null, also Kurzschluß. Für $f \to \infty$ geht auch der Scheinwiderstand gegen unendlich, also wirkt wie ein Leerlauf.

f = 0	=>	Z = 0	=>	Kurzschluß
$f \to \infty$	=>	$Z = \to \infty$	=>	Leerlauf

c) Kapazität C

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} \qquad Z = \frac{1}{\omega C} \qquad \varphi = -90^\circ$$

Der Phasenwinkel eines idealen Kondensators beträgt unabhängig von der Frequenz -90°. Der Betrag des Scheinwiderstandes ist umgekehrt proportional zur Frequenz. Für f = 0 ist der Scheinwiderstand unendlich und die Kapazität wirkt damit für Gleichstrom (f = 0) als Leerlauf. Für $f \to \infty$ geht der Scheinwiderstand gegen Null. Damit wirkt die Kapazität bei hohen Frequenz als ein Kurzschluß.

f = 0	=>	$Z = \to \infty$	=>	Leerlauf
$f \to \infty$	=>	Z = 0	=>	Kurzschluß

Kapazität und Induktivität verhalten sich in Bezug auf die Grenzfälle hoher und tiefer Frequenzen genau entgegengesetzt.

d) Reihenschaltung R-L

$\underline{Z} = R + j\omega L$ $\qquad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ $\qquad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

Mit den Grenzwertbetrachtungen der idealen Induktivität kann diese Schaltung analysiert werden.

Für $f \approx 0$ wirkt die Induktivität als Kurzschluß. Der Scheinwiderstand ist gleich dem ohmschen Widerstand und der Phasenwinkel entsprechend ohmscher Last etwa Null.

Bei hohen Frequenzen $f \to \infty$ überwiegt die Induktivität ($\omega L \gg R$). Der Verlauf von Z und φ zeigt dann das asymptotische Verhalten der reinen Induktivität, vergleiche mit Bild b.

e) Reihenschaltung R-C

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} \qquad Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \varphi = -\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Für f = 0 wirkt der Kondensator als Leerlauf, der Scheinwiderstand wird unendlich. Für f ≈ 0 überwiegt der Blindanteil des Kondensators. Der Phasenwinkel beträgt etwa -90°, der Betrag des Scheinwiderstandes zeigt asymptotisches Verhalten zur reinen Kapazität nach c. Für f → ∞ wirkt die Kapazität als Kurzschluß. Der Betrag des Widerstandes nähert sich dann asymptotisch dem Wert von R und der Winkel geht gegen Null.

f) Parallelschaltung R-C

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} \qquad Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}} \qquad \varphi = -\arctan(\omega RC)$$

Für tiefe Frequenzen wirkt der Kondensator als Leerlauf, der Scheinwiderstand wird von R bestimmt und der Phasenwinkel ist Null. Bei hohen Frequenz überwiegt der Kurzschluß der Kapazität und der Phasenwinkel nähert sich -90°.

g) Parallelschaltung R-L

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{j\omega RL}{R + j\omega RL} \qquad Z = \frac{\omega LR}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \qquad \varphi = 90° - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{j\omega L}{j\omega\frac{L}{R} + 1} * \frac{R}{R} = \frac{j\omega\frac{L}{R}}{1 + j\omega\frac{L}{R}} R \qquad \omega_e = \frac{R}{L}$$

$$\underline{Z} = \frac{j\omega/\omega_e}{1 + j\omega/\omega_e} R \qquad Z = \frac{\omega/\omega_e}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_e)^2}} R \qquad \varphi = 90° - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)$$

Bei hohen Frequenzen wirkt die Induktivität als Leerlauf. Der Scheinwiderstand nähert sich dem ohmschen Widerstand asymptotisch an. Der Phasenwinkel geht gegen Null.

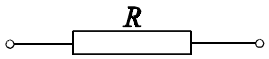
Bei tiefen Frequenz wirkt die Induktivität als Kurzschluß. Der Scheinwiderstand geht gegen Null, wie bei der idealen Induktivität. Da die Induktivität überwiegt, geht der Phasenwinkel gegen 90°.

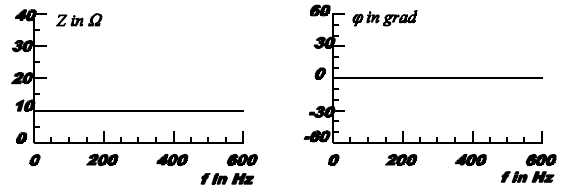
Es ist auch möglich die anderen physikalischen Größen Leitwert, Strom, Spannung, Leistung nach Betrag und Phase darzustellen.

Weitere Anwendung von linearer Darstellung von Betrag und Phase in Kap. 6.7.6 (Schwingkreise).

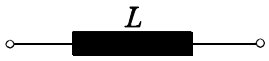
Arbeitsblatt EGII-7 Lineare Darstellung nach Betrag und Phase

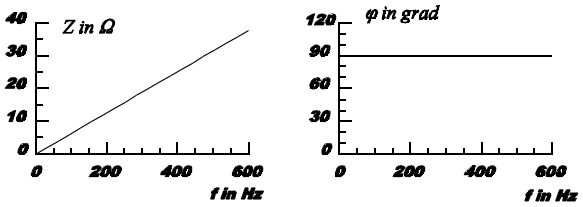
a)



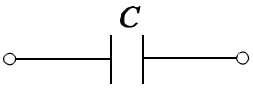


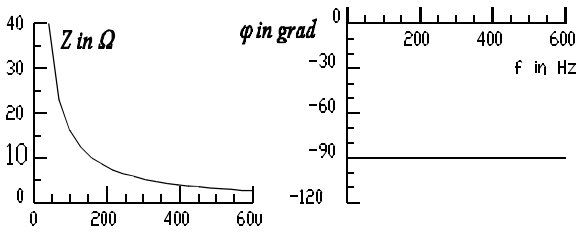
b)



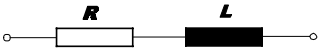


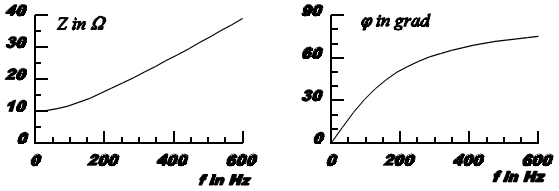
c)





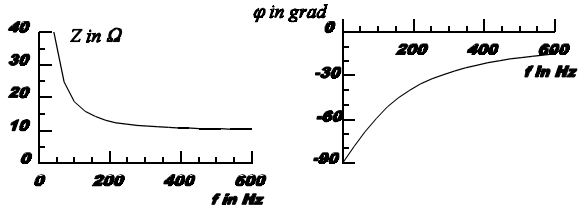
d)



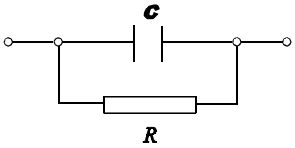


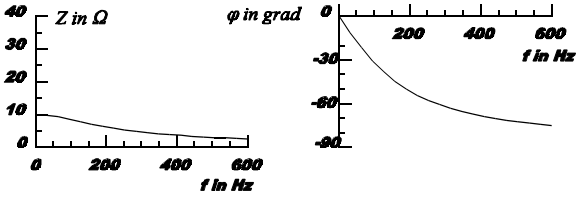
e)



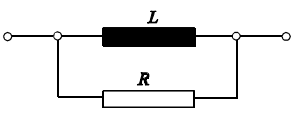


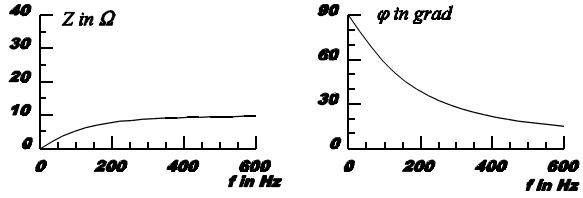
f)





g)





R = 10 Ω L = 10 mH C = 100 µF $\omega_e = R/L = 1/(RC) = 10^3\ s^{-1}$

6.7.3.2. Logarithmische Darstellung

Auf Arbeitsblatt EGII-7 ist ein verhältnismäßig kleiner Frequenzbereich in linearer Darstellung gezeigt. Würde man z.B. bis f = 6 kHz die Größen darstellen, ist im unteren Frequenzbereich kaum etwas zu erkennen. Abhilfe: logarithmische Darstellung.

6.7.3.2.1. Grundlagen der logarithmischen Darstellung

Bei logarithmischer Darstellung unterscheidet man:

beide Achsen linear	→	lineare Darstellung
eine Achse linear		
eine Achse logarithmisch	→	halb logarithmische Darstellung
beide Achse logarithmisch	→	doppelt logarithmische Darstellung

Vorteile der logarithmische Darstellung:

- weiter Variablenbereich darstellbar
- Multiplikation zweier Funktionen entspricht Addition

Nachteile der logarithmische Darstellung:

- keine Darstellung der Null möglich
- etwas ungenauer
- nicht linear interpolierbar

Die Darstellung von Potenzfunktionen im doppelt logarithmischen Maßstab wurde in Mathematik I, Kap. 2.7, theoretisch abgeleitet: **Potenzfunktionen im doppelt Logarithmischen Maßstab dargestellt ergeben Geraden,** siehe Arbeitsblatt EGII-8. **Multiplikation mit einem konstanten Faktor bewirkt eine Verschiebung.**

Anleitung zum Zeichnen der Geraden im doppelt logarithmischen Maßstab

Die Potenzfunktion

$$y = a*x^n$$

ergibt im doppelt logarithmisch Maßstab eine Gerade mit der Steigung

$$Steigung = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{n}{y\text{-}Dekade}}{1} = \frac{n\text{-}Dekaden\ in\ y\text{-}Richtung}{Dekade\ in\ x\text{-}Richttung}$$

Ein Punkt der Geraden ist

$$x = 1 \qquad y = a$$

In der E-Technik sind meist nicht nur Potenzfunktionen vorhanden, sondern diese ergeben sich als Asymptoten von physikalischen Funktionen, siehe Bild B, Arbeitsblatt EGII-8 von der Funktion

$$y_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{10}\right)^2}}{\frac{x}{10}}$$

soll das asymptotische Verhalten untersucht werden. Es sind dabei zwei Grenzfälle zu unterscheiden:

$$\frac{x}{10} \ll 1 \qquad\qquad \frac{x}{10} \gg 1$$

$$y_{A1} = \frac{1}{\frac{x}{10}} \qquad\qquad y_{A1}^{*} = \frac{\frac{x}{10}}{\sqrt{\left(\frac{x}{10}\right)^2}}$$

$$y_{A1} = \frac{10}{x} = 10x^{-1} \qquad\qquad y_{A1}^{*} = 1 = 10^{0}$$

Die beiden oberen Funktionen können leicht als Gerade oder als konstante eingezeichnet werden. Ein Punkt der Funktion y_{A1} ist x = 10 => y_{A1} = 1. Die Steigung der Funktion y_{A1} beträgt -1y-Dekade pro x-Dekade. Es kann noch der Wert bei 10/x = 1 eingezeichnet werden. Danach ist eine Skizze der Funktionskurve leicht zu erstellen.

Weitere Anwendung der logarithmischen Darstellung im nächsten Abschnitt und in Kap. 6.7.5.

Arbeitsblatt EGII-8 Darstellung im doppelt logarithmischen Maßstab

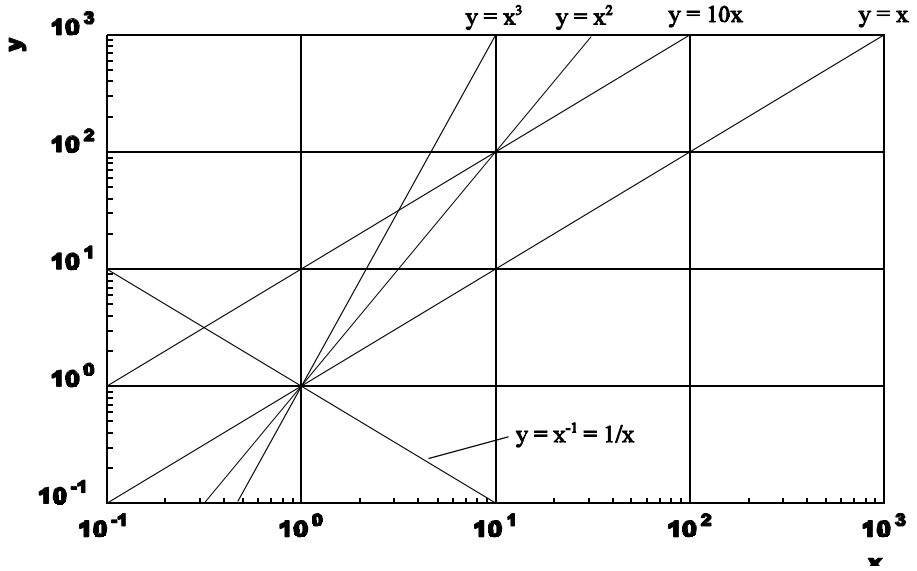


Bild EG67321A

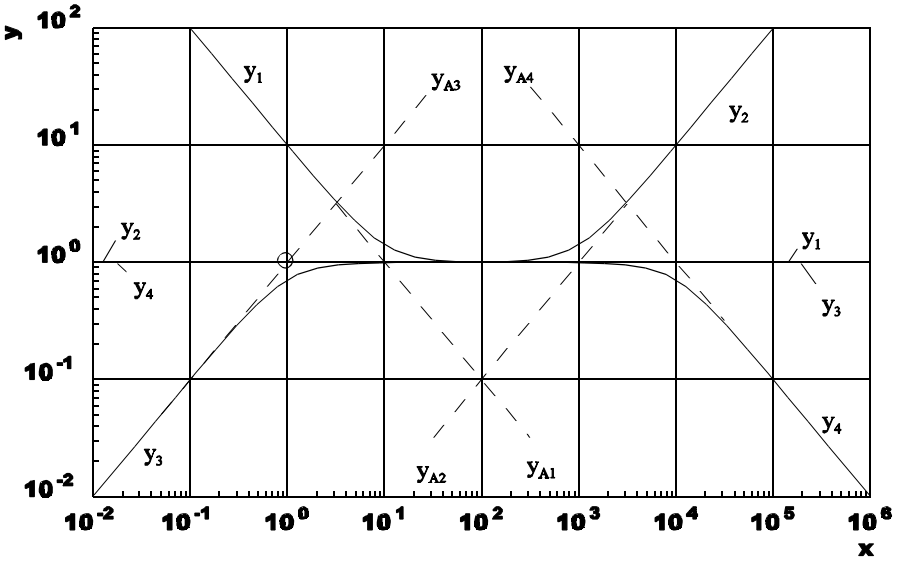


Bild EG67321B

Funktionen:

$$y_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{10}\right)^2}}{\frac{x}{10}} \qquad y_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{1000}\right)^2} \qquad y_3 = \frac{\frac{x}{1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{1}\right)^2}} \qquad y_4 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{10000}\right)^2}}$$

Asymptoten:

$$y_{A1} = \frac{1}{\left(\frac{x}{10}\right)} \qquad y_{A2} = \frac{x}{1000} \qquad y_{A3} = \frac{x}{1} \qquad y_{A4} = \frac{1}{\frac{x}{10000}}$$

6.7.3.3. Anwendung der logarithmischen Darstellung

Für die Elemente und Schaltungen auf Arbeitsblatt EGII-7 wird auf Arbeitsblatt EGII-9 die logarithmische Darstellung gezeigt. Der Winkel wird im halblogarithmischem Maßstab dargestellt und der Betrag des Scheinwiderstandes im doppelt logarithmischen Maßstab. Als abhängige Variable ist die Kreisfrequenz gewählt, weil die Eckfrequenz bei $\omega = 1000$ 1/s gewählt wurde. Das Arbeitsblatt EGII-9 liefert im Prinzip die gleiche Aussage als das Arbeitsblatt EGII-7. Die Kurven lassen sich einfacher konstruieren, weil die Asymptoten Geraden sind. Hier nur zusätzliche Informationen zur logarithmischen Darstellung:

a) Widerstand R

In logarithmischer und nicht logarithmischer Darstellung besteht (wie erwartet) kein Unterschied, weil keine Frequenzabhängigkeit vorhanden ist.

b) Induktivität L

Die Induktivität hat einen linear mit der Frequenz zunehmenden Scheinwiderstand. Die Steigung beträgt:

$$S = \frac{\Delta Z}{\Delta f} = \frac{1\ Dekade\ Widerstand}{1\ Dekade\ Frequenz}$$

c) Kapazität C

Der Funktionsverlauf ist eine Gerade mit negativer Steigung. Die Steigung beträgt:

$$S = \frac{\Delta Z}{\Delta f} = -\frac{1\ Dekade\ Widerstand}{1\ Dekade\ Frequenz}$$

d) Reihenschaltung R-L

mathematische Ableitung:

$$\underline{Z} = R + j\omega L = R\left(1 + \omega\frac{L}{R}\right) = R\left(1 + \frac{j\omega}{\omega_e}\right)$$

$$\omega_e = \frac{R}{L} = 10^3\,\frac{1}{s}$$ - Eckkreisfrequenz

Für den Betrag des Scheinwiderstandes

$$Z = R * \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2}$$

ergeben sich zwei Asymptoten für die Grenzfälle:

$\omega \ll \omega_e$	$\omega \gg \omega_e$
$Z = R$	$Z = R * \frac{\omega}{\omega_e} = \frac{R*\omega}{R/L} = \omega L$

physikalische Ableitung:

Bei kleinen Frequenzen überwiegt der Widerstand und bei hohen Frequenzen die Induktivität. Somit kann die Kurve d aus Kurve a ($\omega \ll \omega_e$) und Kurve b ($\omega \gg \omega_e$) zusammengesetzt werden.

Hinweis zur Konstruktion des Winkelverlaufes:

Nach Bild d aus Arbeitsblatt EGII-9 kann der Verlauf $\varphi(\omega)$ durch drei Geraden angenähert werden:

$\omega \leq \frac{\omega_e}{10}$ $\varphi = 0$

$\frac{\omega_e}{10} \leq \omega \leq 10\omega_e$ Gerade durch $\left(\varphi = 0,\ \omega = \frac{\omega_e}{10}\right)$ und $(\varphi = 90^\circ,\ \omega = 10\omega_e)$

$\omega \geq \omega_e$ $\varphi = 90^\circ$

Zur Annäherung des Winkelverlaufes siehe auch Kap. 6.7.5.

e) Reihenschaltung R-C

tiefe Frequenz	hohe Frequenz
Z_R hoch	Z_R tief
C-überwiegt	R-überwiegt
Verlauf nach c)	Verlauf nach a)

f) Parallelschaltung R-C

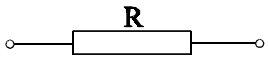
tiefe Frequenz	hohe Frequenz
Z_R etwa R	Z_R tief
R-überwiegt	C-überwiegt
Verlauf nach a)	Verlauf nach c)

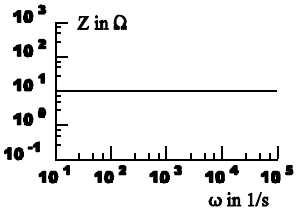
g) Parallelschaltung R-L

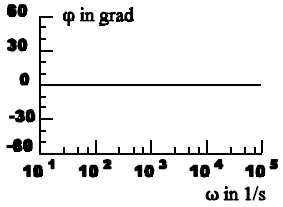
tiefe Frequenz	hohe Frequenz
Z_L Kurzschluß	Z_L etwa R
L-überwiegt	R-überwiegt
Verlauf nach b)	Verlauf nach a)

Arbeitsblatt EGII-9 Logarithmische Darstellung nach Betrag und Phase

a)

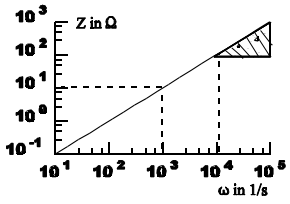


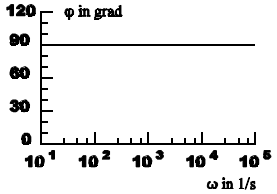




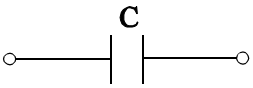
b)

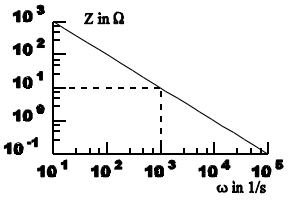


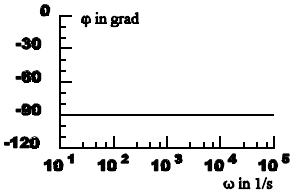




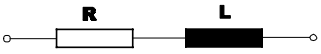
c)

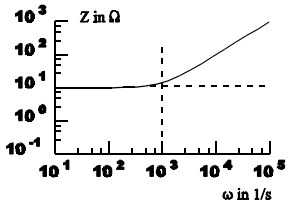


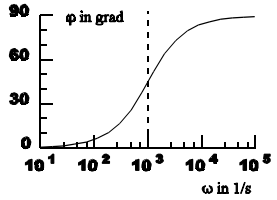




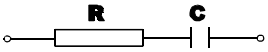
d)

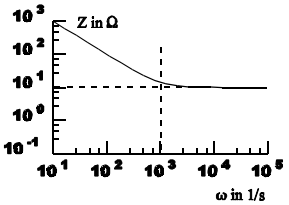


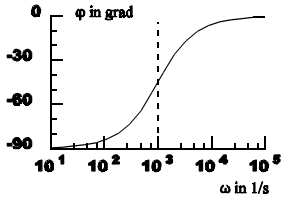




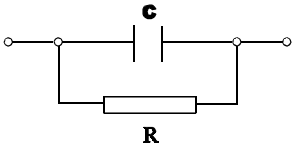
e)

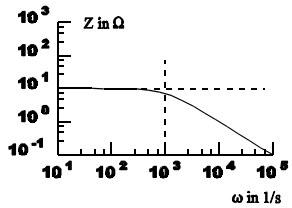


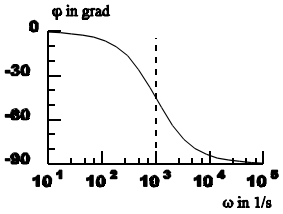




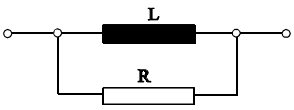
f)

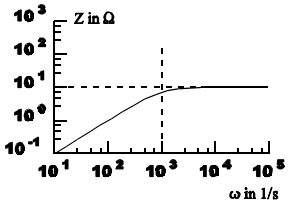


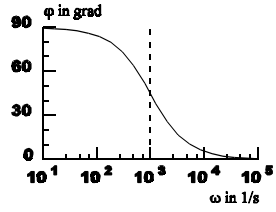




g)







R = 10 Ω L = 10 mH C = 100µF ω_e = R/L = 1/(RC) = 10^3 s^{-1}

6.7.4. Ortskurven

6.7.4.1. Wiederholung: Mathematische Grundlagen der Ortskurve

Definition: Eine Ortskurve ist eine komplexe Funktion die von einer reellen Variablen abhängig ist. Der Graf der Zeigerspitzen, in der komplexen Ebene dargestellt, nennt man Ortskurve.

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten mathematischen Grundlagen der Ortskurven wiederholt werden.

Komplexe Gerade

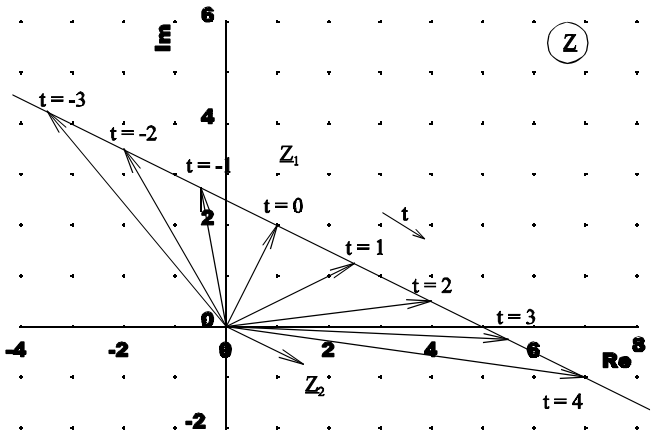


Bild EG6741A

Verbindet man die Zeigerspitzen der Funktion

$$\underline{z}(t) = \underline{z}_1 + \underline{z}^*t$$

für verschiedene t-Werte erhält man die komplexe Gerade nach Bild EG6741A. Dabei ist $\underline{z}_1$ ein Punkt der Geraden, für t = 0. Die komplexe Zahl $\underline{z}_2$ gibt die Richtung der Geraden an. Die wichtigsten analytisch auswertbaren Ortskurven von physikalischen Funktionen in der Elektrotechnik sind komplexe Geraden parallel zu den Achsen der Gauß'sche Zahlenebene und deren Inverse. Die elektrischen Ortskurven sind in der Regel vom reellen Parameter Frequenz f oder besser der Kreisfrequenz ω abhängig. Da mit nur positiven Frequenzen gerechnet wird, ergeben sich als Ortskurven Halbgeraden und deren Inverse. Invertieren ist deshalb so wichtig, weil z.B. die Umwandlung Leitwert-Widerstand und das ohmsche Gesetz eine Invertierung benötigen. Dazu der erste Satz: Die Inversion einer Geraden nicht durch Null ergibt einen Kreis. Oder: **Die Inversion einer Halbgeraden nicht durch Null ergibt einen Halbkreis durch Null.** Auch die umkehrte Folgerung ist richtig: Die Inversion eines Halbkreises durch Null ergibt eine Gerade nicht durch Null.

Das Ergebnis der Invertierung von vier komplexen Geraden (parallel zu den Achsen) ist auf Arbeitsblatt EGII-10 dargestellt.

Die dichteste Entfernung Gerade-Ursprung wird abgebildet auf die weiteste Entfernung Kreis-Ursprung. Dieses ist der Durchmesserzeiger des Kreises. Der Punkt $t = \infty$ wird immer abgebildet auf den Ursprung. Somit kann der Kreis konstruiert werden.

Wiederholung: Invertierung einer komplexen Zahl

$\underline{z}_D = r*e^{j\varphi}$

$$\frac{1}{\underline{z}_D} = \frac{1}{r*e^{j\varphi}} = \frac{1}{r}*e^{-j\varphi}$$

Durch die Invertierung wird der Betrag invertiert und der Winkel negiert. Mit Hilfe dieser Information kann die Lage des Halbkreises bestimmt werden. Zurück zu Arbeitsblatt EGII-10:

	Winkelbereich $\underline{z}$	Winkelbereich $\underline{w}$
a)	$0^\circ \le \varphi < 90^\circ$	$-90^\circ < \varphi \le 0^\circ$
b)	$0^\circ \le \varphi < 90^\circ$	$-90^\circ < \varphi \le 0^\circ$
c)	$-90^\circ < \varphi \le 0^\circ$	$0^\circ \le \varphi < 90^\circ$
d)	$-180^\circ \le \varphi < 90^\circ$	$90^\circ > \varphi \ge 180^\circ$

Konstruktionshinweise zur Invertierung komplexer Geraden

A] Dichteste Entfernung zur Geraden bestimmen $\underline{z}_D$

B] $\underline{w}_D = \frac{1}{\underline{z}_D}$ - Durchmesserzeiger des Kreises

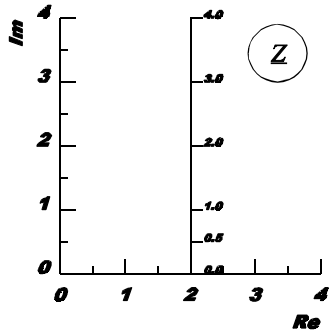
C] $t \to \infty$ => $w(t\to\infty) = (0 + j0)$

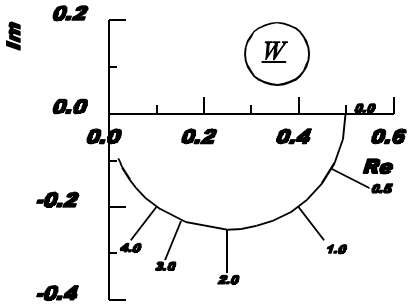
D] Mittelpunkt $w_{mittel} = \frac{1}{2}(\underline{w}_D + w_\infty) = \frac{1}{2}\underline{w}_D$

E] Halbkreis über Invertierungsgesetze auswählen

F] t-Skalierung durchführen

Arbeitsblatt EGII-10 Invertierung komplexer Geraden $\underline{w}(t) = \frac{1}{\underline{z}(t)}$ $w(t=0) = \frac{1}{z(t=0)}$

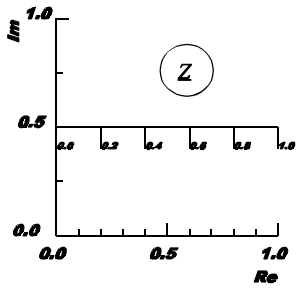


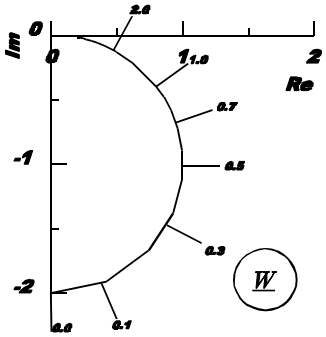


$\underline{z} = 2 + jt$

$\underline{w} = \frac{1}{2 + jt}$

$\underline{z}(t=0) = (2 + j0)$ <=> $\underline{w}(t=0) = (0.5 + j0)$

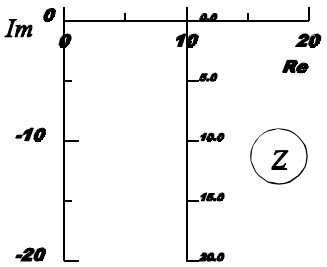


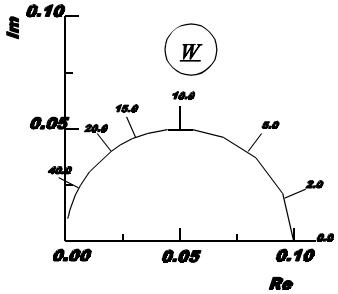


$\underline{z} = t + j0.5$

$\underline{w} = \frac{1}{t + j0.5}$

$\underline{z}(t=0) = (0 + j0.5)$ <=> $\underline{w}(t=0) = (0 - j2)$

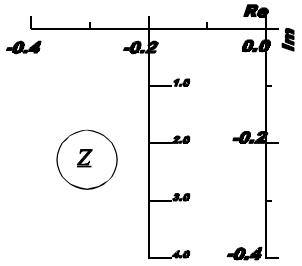


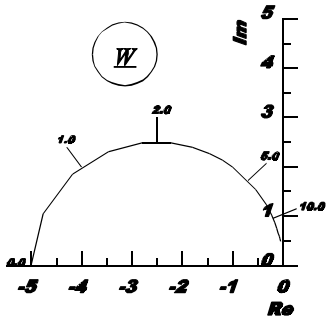


$\underline{z} = 10 - jt$

$\underline{w} = \frac{1}{10 - jt}$

$\underline{z}(t=0) = (10 + j0)$ <=> $\underline{w}(t=0) = (0.1 + j0)$





$\underline{z} = -0.2 - j0.1t$

$\underline{w} = \frac{1}{-0.2 - j0.1t}$

$\underline{z}(t=0) = (-0.2 + j0)$ <=> $\underline{w}(t=0) = (-5 + j0)$

Invertierung einer Geraden durch Null

Beispiel: $\underline{z}(t) = j*t$ $\qquad \underline{w}(t) = \frac{1}{jt}$

$$\underline{w}(t) = \frac{1}{jt} = -\frac{1}{t}*j = -s*t \qquad s = \frac{1}{t}$$

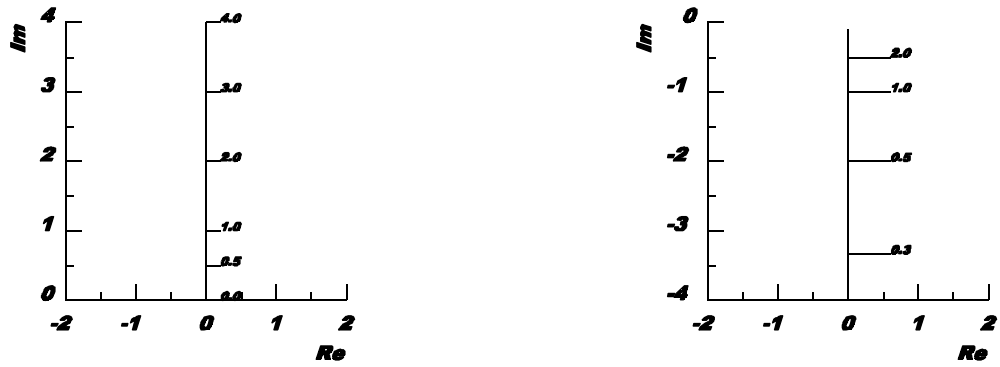


Bild EG6741B

Ergebnis: **Die Invertierung einer Geraden mit linearer Teilung durch Null ergibt wieder eine Gerade durch Null allerdings mit nichtlinearer Teilung.**

Zusammenfassung

Invertierung von	ergibt
Gerade nicht durch Null	Kreis durch Null
Gerade durch Null	Gerade durch Null
Kreis durch Null	Gerade nicht durch Null
Kreis nicht durch Null	Kreis nicht durch Null

Die allgemeine Form von komplexen Kreisen und Geraden lautet:

$$\underline{w}(t) = \frac{\underline{z}_1 + \underline{z}_2 * t}{\underline{z}_3 + \underline{z}_4 * t}$$

Arbeitsblatt EGII-11: Konstruktion allgemeiner Kreise

Ein allgemeiner Kreis muß mit Hilfe der folgenden mathematischen Operationen konstruiert werden:

- Polynomdivision
- Inversion einer bekannten Geraden ergibt einen Kreis
- Streckung
- evtl. Drehung
- Verschiebung

Beispiel: Konstruktion der Ortskurve

$$\underline{w}(t) = \frac{4t + 13j}{t + 2j}$$

Polynomdivision:

$$(4t + 13j):(t + 2j) = 4 + \frac{5j}{t + 2j}$$

$$\underline{4t + 8j}$$

$$5j$$

$$\underline{w}(t) = 4 + 5j\frac{1}{t + 2j}$$

Zur Konstruktion von $\underline{w}(t)$ werden nacheinander einzelne Ortskurven betrachtet. Die nächste Ortskurve ergibt sich durch eine bestimmte Operation auf die vorhergehende:

$\underline{w}_1(t) = t + 2j$ Gerade

$\underline{w}_2(t) = \frac{1}{\underline{w}_1(t)} = \frac{1}{t + 2j}$ Invertierung ergibt Kreis

$\underline{w}_3(t) = 5 * \underline{w}_2(t) = \frac{5}{t + 2j}$ Streckung um 5

$\underline{w}_4(t) = j * \underline{w}_3(t) = \frac{5j}{t + 2j}$ Drehung um 90°

$\underline{w}(t) = 4 + \underline{w}_4(t) = 4 + \frac{5j}{t + 2j}$ Verschiebung um 4

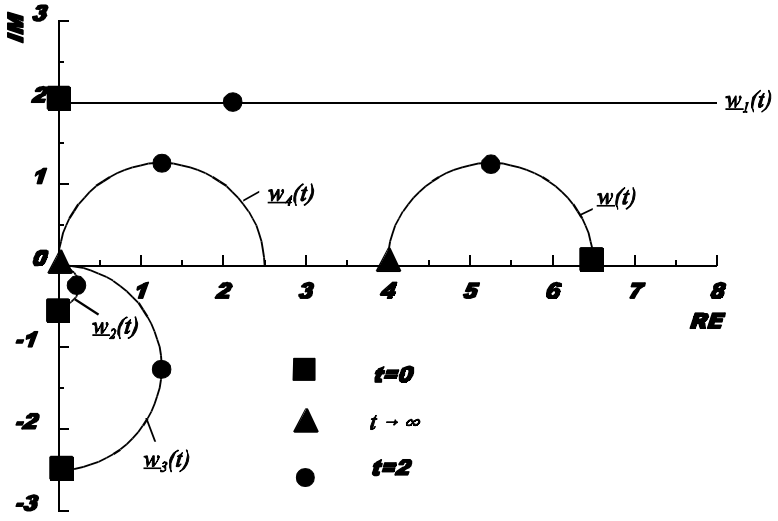


Bild EG6741D

Allgemeine Ortskurven

Elektrische Netzwerke mit einem Energiespeicher (C oder L) ergeben Ortskurven als Kreise oder Geraden. Netzwerke höherer Ordnung ergeben im allgemeinen Ortskurven der Form

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{b_m*(j\omega)^m + b_{m-1}*(j\omega)^{m-1} + ... + b_2*(j\omega)^2 + b_1*(j\omega) + b_0}{a_n*(j\omega)^n + a_{n-1}*(j\omega)^{n-1} + ... + a_2*(j\omega)^2 + a_1*(j\omega) + 1} \qquad m \le n$$

dieses läßt sich umformen mit Hilfe der Nullstellen von Nenner und Zähler, z.B. für m = 2, n = 3

$$F(j\omega) = A\frac{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_A}\right)*\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_B}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)*\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)*\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_3}\right)}$$

Oberer Frequenzgang läßt sich aufspalten nach Betrag und Phase

$$F = A\frac{\sqrt{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_A}\right)^2}*\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_B}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}*\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}*\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_A}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_B}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)$$

Mit Hilfe von

F(ω) und φ(ω)

kann für verschiedene ω-Werte die Ortskurve berechnet werden.

6.7.4.2. Physikalische Ortskurven

Beispiel 1:

Für die Schaltung auf Arbeitsblatt EGII-12 sollen die folgenden Ortskurven konstruiert werden:

$\underline{Z}$	- Scheinwiderstand
$\underline{Y}$	- Scheinleitwert
$\underline{I}$	- Strom
$\underline{U}_2$	- Ausgangsspannung
$\underline{S}$	- Scheinleistung
$\underline{F}$	- Frequenzgang

Lösung:

$$\underline{Z} = R + j\omega L = R\left(1 + j\frac{\omega}{R/L}\right) = R\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_e}\right) = 10\ \Omega\left(1 + j\frac{\omega}{1000\ s^{-1}}\right)$$

$$\omega_e = \frac{R}{L} = \frac{10\ \Omega}{10\ mH} = 10^3\,\frac{1}{s}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R\left(1 + j\omega/\omega_e\right)} = 0.1\ S\frac{1}{1 + j\omega/1000\ s^{-1}}$$

$$\underline{I} = U_q * \underline{Y} = \frac{U_q}{R}\ \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e} = 2\ A\frac{1}{1 + j\omega/1000 s^{-1}}$$

$$\underline{U}_2 = U_q\ \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = U_q\ \frac{j\omega/\omega_e}{1 + j\omega/\omega_e} = 20\ V\frac{j\omega/1000 s^{-1}}{1 + j\omega/1000 s^{-1}}$$

$$\frac{jt}{jt + 1} = 1 - \frac{1}{1 + jt}$$

$$\underline{U}_2 = U_q\left(1 - \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}\right)$$

$$\underline{S} = U * I^* = \frac{U_q^2}{R}\ \frac{1}{1 - j\omega/\omega_e} = 40\ VA\frac{1}{1 - j\omega/1000 s^{-1}}$$

$$\underline{F} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{U_q} = 1 - \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}$$

Die auf Arbeitsblatt EGII-12 dargestellten Ortskurven können mit den Grundlagen aus Kap. 6.7.4.1 und mit oberen Berechnungsergebnissen konstruiert werden.

Diskussion der Ergebnisse:

a) Der komplexe Widerstand ist eine komplexe Halbgerade. Bei der Eckfrequenz sind Real- und Imaginärteil gleich.

b) Der komplexe Leitwert ist durch Inversion der komplexen Widerstands-Geraden ein Halbkreis. Der Durchmesser beträgt 1/R. Ein weiterer markanter Wert ist die Eckfrequenz ω_e.

$$\underline{Y}(\omega{=}\omega_e) = \frac{1}{\underline{Z}(\omega{=}\omega_e)} = \frac{1}{R} * \frac{1}{1 + j} = \frac{1}{2R}(1 - j)$$

c) Da die Spannung den Phasenwinkel 0° aufweist, ergibt sich die komplexe Ortskurve des Stromes durch Multiplikation der Leitwert-Ortskurve mit U_q.

d) Die Ortskurve der Spannung $\underline{U}_R$ hat die gleiche Form als der Strom:

$$\underline{U}_R = R\,\underline{I}$$

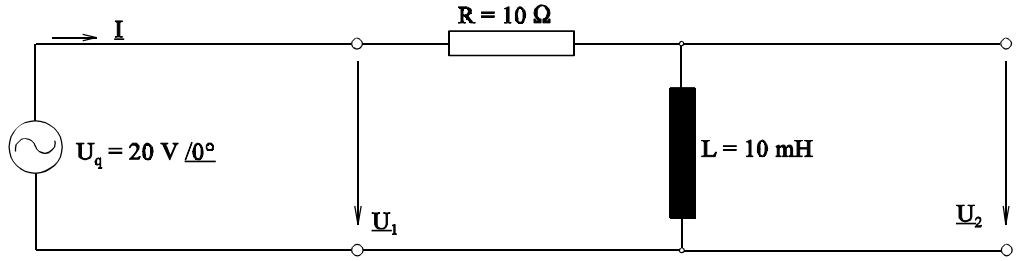
Der Strom wird nur mit dem nicht frequenzabhängigen reellen Parameter R multipliziert. Die Ortskurve $\underline{U}_2$ ließe sich anschließend bestimmen aus:

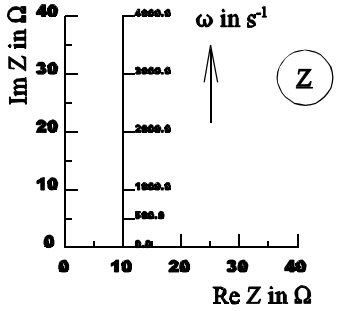
$$\underline{U}_2 = U_q - \underline{U}_R$$

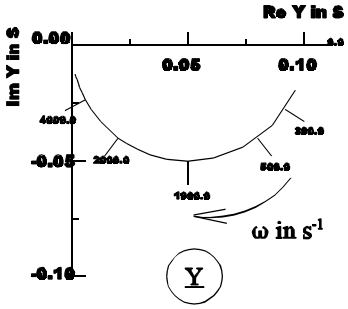
e) Multipliziert man die konjungiert komplexe Ortskurve des Stroms mit U_q erhält man Ortskurve der komplexen Scheinleistung.

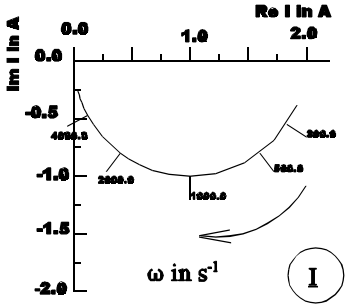
f) Die Ortskurve des Frequenzganges $\underline{F}$ ergibt sich durch Division der Ortskurve der Spannung $\underline{U}_2$ durch den reellen Parameter U_q. Die Form der Ortskurven $\underline{U}_2$ und $\underline{F}$ sind daher gleich.

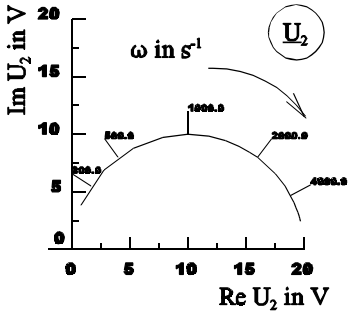
Arbeitsblatt EGII-12

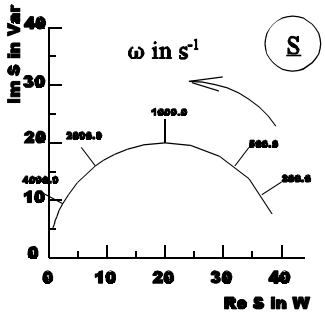


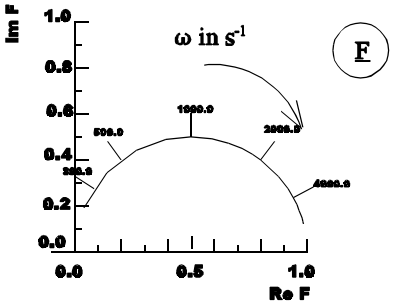












$$\underline{Z} = 10\,\Omega\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_e}\right) \qquad \underline{Y} = \frac{0.1\,S}{1 + j\omega/\omega_e} \quad \omega_e = \frac{R}{L} = 1000\frac{1}{s}$$

$$\underline{I} = \frac{2\,A}{1 + j\omega/\omega_e} \qquad \underline{U}_2 = 20\,V\left(1 - \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}\right)$$

$$\underline{S} = \frac{40\,VA}{1 - j\omega/\omega_e} \qquad \underline{F} = 1 - \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}$$

Beispiel 2: Für die Schaltung auf Arbeitsblatt EGII-13 sollen die folgenden Ortskurven konstruiert werden:

$\underline{Z}$ - Scheinwiderstand
$\underline{Y}$ - Scheinleitwert
$\underline{I}$ - Strom
$\underline{U}_2$ - Ausgangsspannung
$\underline{S}$ - Scheinleistung
$\underline{F}$ - Frequenzgang

Lösung:

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R\left(1 + j\frac{\frac{1}{RC}}{\omega}\right) = R\left(1 + \frac{\omega_e}{j\omega}\right) = R\left(1 - j\frac{\omega_e}{\omega}\right)$$

$$\omega_e = \frac{1}{RC} = \frac{1}{10\,\Omega * 100\,myF} = 1000\,\frac{1}{s}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega C}\frac{1}{R} = \frac{1}{R}\frac{j\omega/\omega_e}{1 + j\omega/\omega_e}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R}\left[1 - \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}\right] \quad \text{Konstruktion besser über} \quad \underline{Y}(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(\omega)}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{j\omega C} * \underline{I} = \frac{1}{j\omega C}\frac{U_q}{R} * \frac{j\omega * RC}{1 + j\frac{\omega}{\omega_e}} = U_q\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_e}}$$

$$\underline{I} = U_q * \underline{Y} = \frac{U_q}{R}\,\frac{j\frac{\omega}{\omega_e}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_e}}$$

$$\underline{S} = U_q * \underline{I}^* = \frac{U_q^2}{R}\,\frac{-j\frac{\omega}{\omega_e}}{1 - j\frac{\omega}{\omega_e}}$$

$$\underline{F} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{U_q} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_e}}$$

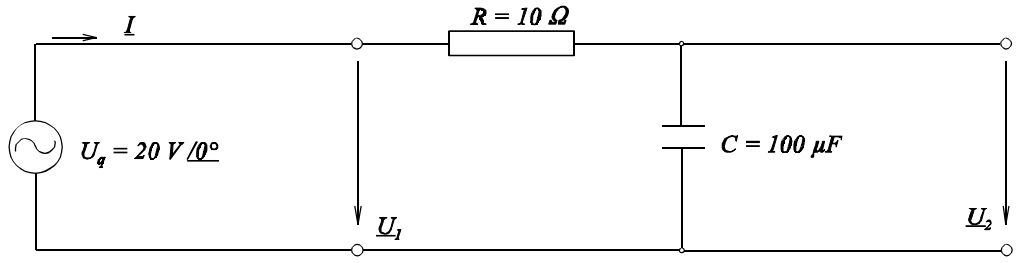
Diskussion der Ergebnisse:

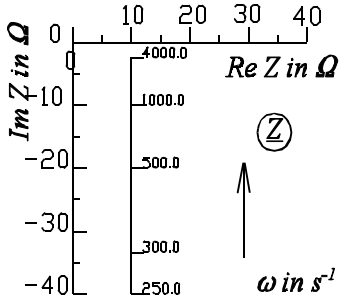
a) Die Ortskurve des Widerstandes ist eine Gerade mit nichtlinearer Teilung.

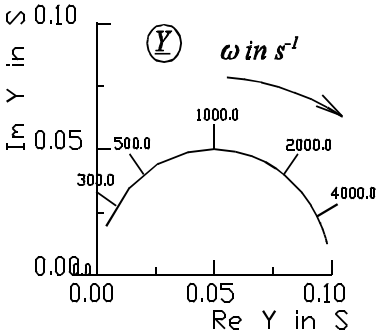
b) Die Ortskurve des Scheinleitwertes kann aus der berechneten Formel konstruiert werden. Einfacher allerdings ist, die Ortskurve des Scheinwiderstandes zu invertieren, weil die Invertierung einer Geraden keine Schwierigkeiten bereiten sollte.

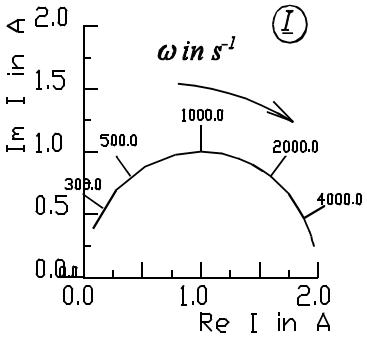
c bis e) Wie bei R-L ergeben sich die Ortskurven durch Operationen auf schon bekannte Ortskurven.

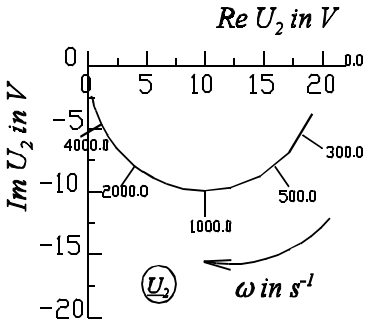
Arbeitsblatt EGII-13

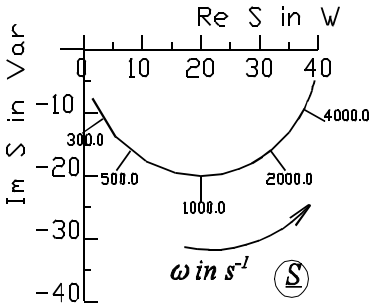


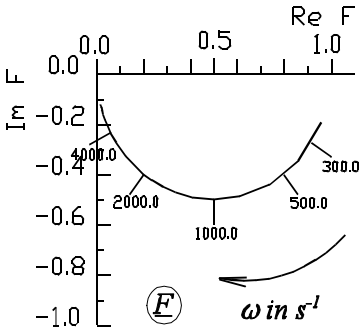












$$\underline{Z} = 10\,\Omega\left(1 - j\frac{1}{\omega/\omega_e}\right) \qquad \underline{Y} = 0.1\,S\frac{j\omega/\omega_e}{1 + j\omega/\omega_e} \qquad \omega_e = \frac{1}{R*C} = 1000\frac{1}{s}$$

$$\underline{I} = 2\,A\frac{j\omega/\omega_e}{1 + j\omega/\omega_e} \qquad \underline{U}_2 = \frac{20\,V}{1 + j\omega/\omega_e}$$

$$\underline{S} = 40\,VA\frac{-j\omega/\omega_e}{1 - j\omega/\omega_e} \qquad \underline{F} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}$$

6.7.5. Filter

Filter haben die Aufgabe, bestimmte Frequenzen zu unterdrücken und andere Frequenzbereiche aus einem Gesamtsignal herauszuheben.

6.7.5.1. Einteilung

Einteilen lassen sich die Filter u.a. nach:
- Digitale und analoge Filter
- Tiefpaß, Hochpaß, Bandpaß
- Schmalband- und Breitbandfilter

Digitale und analoge Filter: Digitale Filter werden mit digitalen Schaltungen (z.B. TTL, Signalprozessoren, Rechnern) realisiert und sollen in Grundlagen der Elektrotechnik nicht behandelt werden. Analoge Filter werden mit Induktivitäten, Kapazitäten, Widerständen und Verstärkern aufgebaut.

Tiefpaß: Ein Tiefpaß läßt die tiefen Frequenzen durch und sperrt die hohen.

Hochpaß: Ein Hochpaß hat das entgegengesetzte Verhalten zum Tiefpaß. Er läßt die hohen Frequenzen durch und sperrt die tiefen.

Bandpaß: Schaltet man einen Hochpaß und einen Tiefpaß in Reihe und dimensioniert die Eckfrequenzen so, daß die des Hochpasses niedriger liegen als die des Tiefpasses, sperrt bei tiefen Frequenzen der Hochpaß und bei hohen Frequenzen sperrt der Tiefpaß. Nur bei mittleren Frequenzen können die Signale passieren.

Breitbandfilter: Ein Bandpaß, wo ein großer Frequenzbereich das Filter passiert, wird Breitbandfilter genannt.

Schmalbandfilter: Diese dienen zur Herausfilterung sehr schmaler Frequenzbänder.

Realisierung von Filtern:

HP, TP, Breitband:	RC-Schaltungen
Schmalband:	LC-Schaltungen

Hinweis: Jedes Bauelement und insbesondere jeder Verstärker hat eine obere Grenzfrequenz, weil bei sehr hohen Frequenzen jedes Bauelement parasitäre Elemente enthält. Beispiel: Die Zuleitung des Kondensators wirkt als Induktivität.

6.7.5.2. Grenzfrequenz und Bandbreite

Die Grenzfrequenz wird definiert als Frequenz wo die Übertragungsfunktion um $\sqrt{2}$ vom Maximum abweicht

$$f_{grenz} \quad => \quad \frac{F(\omega)}{F_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Im logarithmischen Maß:

$$20\,dB * lg\left(\frac{F(\omega)}{F_{max}}\right) = 20\,dB * lg\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\,dB$$

Merke: $\frac{1}{\sqrt{2}} \triangleq -3\,dB$

Unterscheidung:

$f_{grenz\ unten}$ - untere Grenzfrequenz
$f_{grenz\ obere}$ - obere Grenzfrequenz

Bandbreite:

Definition: $f_{Band} = f_{grenz\ oben} - f_{grenz\ unten}$

Werden Gleichsignale (f = 0) übertragen, beträgt untere Grenzfrequenz ($f_{grenz\ unten}$ = 0) Null.

Eine obere Grenzfrequenz ist immer durch parasitäre Elementen vorhanden.

6.7.5.3. Bode-Diagramm

Analoge Filter weisen Wechselstrom-Charakteristiken auf. Diese sind komplex darstellbar, also nach Betrag und Phase. Bei Filtern ist der komplexe Frequenzgang von Interesse:

$$\underline{F} = F * e^{j\varphi}$$

Logarithmiert man F erhält man

$$\ln(\underline{F}) = \ln(F * e^{j\varphi}) = \ln(f) + j\ln(e^{j\varphi})$$

$$\ln(\underline{F}) = \ln(F) + j\varphi$$

Durch das Logarithmieren wird der Frequenzgang zerlegt in

Realteil	≙	Logarithmus vom Betrag des Frequenzganges
Imaginärteil	≙	Winkel des Frequenzganges

Darzustellen in einem Diagramm ist danach

- logarithmisch der Betrag und
- linear der Winkel.

Für den Betrag ist die in Kap. 6.7.2 eingeführte Angabe in dB üblich

$$F_{dB} = 20\,dB * lg(F) = 20\,dB\ lg\frac{U_2}{U_1}$$

Im Bode Diagramm werden die zwei Komponenten

- F_{dB}
- φ

in Abhängigkeit der Kreisfrequenz (oder Frequenz) aufgetragen. Die Darstellung erfolgt untereinander, mit gleicher Abszissen (ω)-Skalierung. Die ω-Achse erhält eine logarithmische Skalierung, weil weite Frequenzbereiche von Interesse sind.

Dadurch ergibt sich für die Darstellung $F_{dB}(\omega)$ eine doppelt logarithmische Skalierung, weil F_{dB} schon ein logarithmisches Maß ist. Die Darstellung $\varphi(\omega)$ ist halblogarithmisch.

Für Handskizzen empfiehlt sich halb logarithmisches Papier.

Anhand von verschiedenen Filtern wird die Anwendung des Bode Diagramms in Kap. 6.7.5.4 bis Kap. 6.7.5.7 aufgezeigt.

Zusammenfassung:

Im Bode-Diagramm wird aufgetragen:

$$\boldsymbol{F_{dB} = 20\,dB * lg(F) = 20\,dB\ lg\left(\frac{U_2}{U_1}\right)}\ \textbf{und}\ \varphi$$

in Abhängigkeit der Kreisfrequenz. Die Kreisfrequenz wird dabei logarithmisch skaliert.

6.7.5.4. Tiefpaß 1.Ordnung

Der Frequenzgang der Schaltung nach Arbeitsblatt EGII-14 soll untersucht werden. Nach der Spannungsteilerregel ergibt sich:

$$\underline{F} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

mit der Eckkreisfrequenz $\omega_e = \frac{1}{RC}$

läßt sich angeben: $\underline{F} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_e}}$

Aus F kann Betrag und Phase bestimmt werden:

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2}} \qquad \varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)$$

$$F_{dB} = 20\ dB * lg \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2}}$$

Für die Grenzfälle hoher und tiefer Frequenzen ergeben sich für den Betrag die Asymptoten:

tiefe Frequenz $\omega \ll \omega_e$	hohe Frequenz $\omega \gg \omega_e$
$1 \gg \frac{\omega}{\omega_e}$	$1 \ll \frac{\omega}{\omega_e}$
F = 1	$F = \frac{1}{\omega/\omega_e}$
$F_{dB} = 0$	$F(\omega_e) = 1$
Steigung: 0	Steigung: -20 dB/Dekade

Für die obigen Grenzfälle (Asymptoten) sind Potenzfunktion vorhanden, die im doppelt logarithmischen Maßstab Geraden darstellen, die als Asymptoten den Verlauf annähern, siehe Arbeitsblatt EGII-14. Wo sich die Asymptoten schneiden, ist die Eckkreisfrequenz vorhanden, siehe oberes ω_e. Dort ist die größte Abweichung zwischen Asymptoten und exaktem Verlauf, siehe Arbeitsblatt EGII-14. Die Dämpfung beträgt an dieser Stelle

$$F_{dB} = 20\ dB * lg \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = -3\ dB$$

In diesem Fall (Filter 1. Ordnung) ist die Eckfrequenz auch die Grenzfrequenz:

$$f_{grenz} = f_e = \frac{\omega_e}{2\pi}$$

Der Verlauf des Phasenganges wird durch drei Geraden angenähert, siehe Arbeitsblatt EGII-14

Konstruktionshinweise

- Am besten eignet sich halblogarithmisches Millimeterpapier, weil der Winkel linear auf getragen wird. Auch F_{dB} wird halblogarithmisch aufgetragen. Die Funktion $F(\omega)$ wird durch den Übergang $F \rightarrow F_{dB}$ aber doppelt logarithmisch dargestellt.

- F_{dB} und φ in Grad werden linear aufgetragen.

- Die Kreisfrequenz ω (evtl. auch die Frequenz f) wird logarithmisch aufgetragen.

- Die Eckfrequenz $\omega_e = 1/(R*C)$ etwa in die Mitte legen.

- Für den Betrag F_{dB} bis $\omega = \omega_e$ die Gerade F = 0 dB einzeichnen.

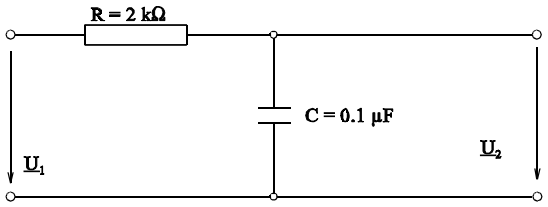
- Für $\omega \geq \omega_e$ eine Gerade einzeichnen mit den Punkten

 F = 0 dB für $\omega = \omega_e$
 F = -20 dB für $\omega = 10\omega_e$

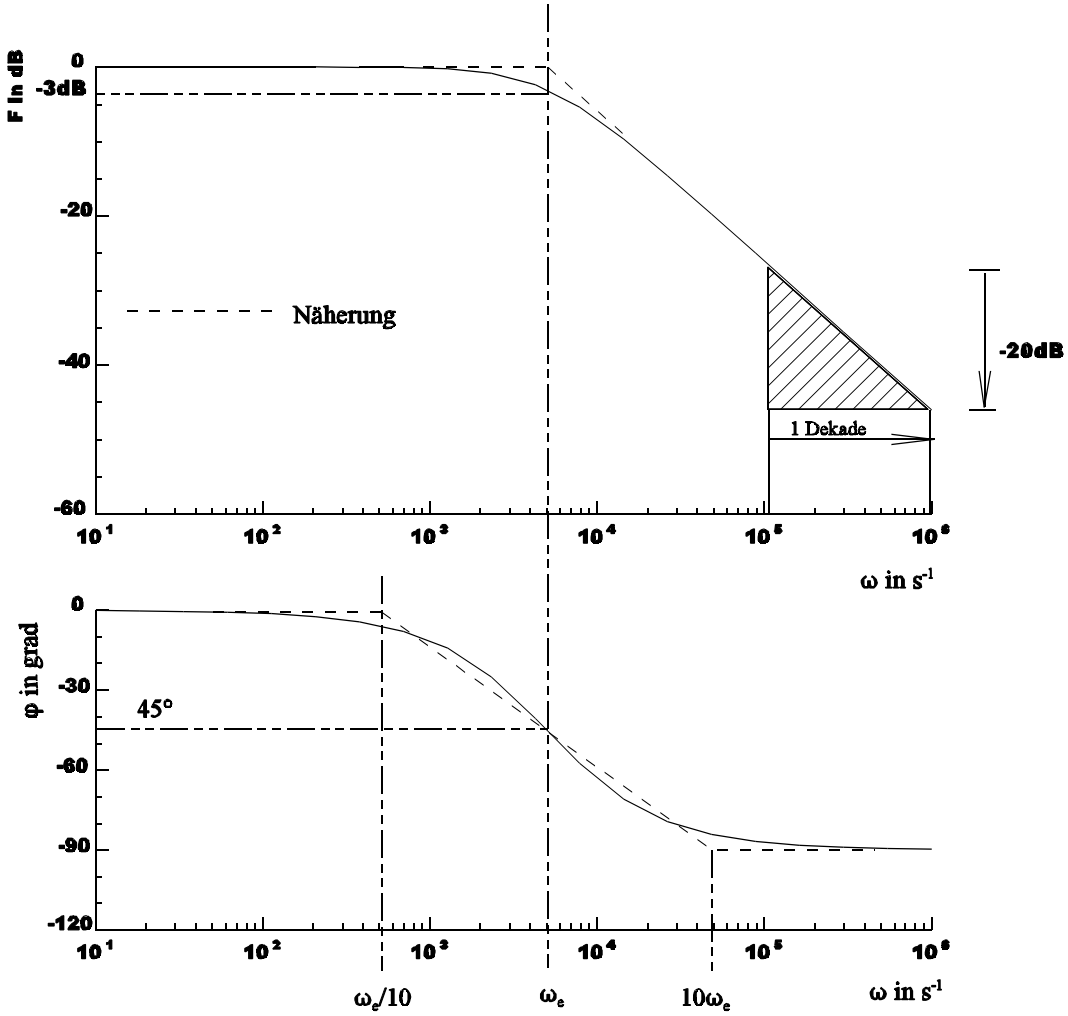
- Für den Phasenwinkel 3 Geraden einzeichnen

 1. Gerade: $\varphi = 0$ $\omega \leq \omega_e/10$
 2. Gerade: $\varphi = -90^\circ$ $\omega \geq 10\omega_e$
 3. Gerade: Enden der Geraden 1 und 2 verbinden

Arbeitsblatt EGII-14: Tiefpaß 1.Ordnung



$\omega_e = \frac{1}{R*C} = 5000\,\frac{1}{s}$ $\qquad f_{gr} = 795.8$ Hz



$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_e}}$$

$$F_{dB} = 20\,dB\,lg\,\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2}} \qquad \varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)$$

Das Verhalten der folgenden Schaltung soll untersucht werden und im Bode Diagramm dargestellt werden. Um welche Art von Schaltung handelt es sich?

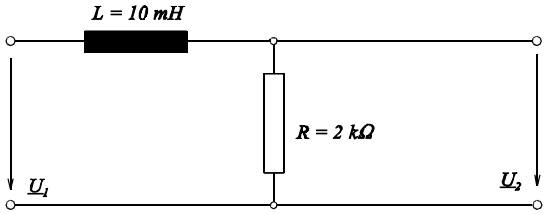


Bild EG6754C

$$\underline{F} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_2} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{R/L}}$$

$$\omega_e = \frac{R}{L} = \frac{2\ k\Omega}{10\ mH} = 200 * 10^3 \frac{1}{s}$$

$$\underline{F} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_e}}$$

Damit hat F die gleich Form als bei der vorigen Schaltung und ist auch ein Tiefpaß.

Test dazu

$\omega = 0$	=>	F = 1
$\omega \to \infty$	=>	F = 0

Konstruktion kann mit den obigen Hinweisen erfolgen.

6.7.5.5. Hochpaß 1.Ordnung

Der Frequenzgang der Schaltung nach Arbeitsblatt EGII-15 soll untersucht werden. Nach der Spannungsteilerregel ergibt sich:

$$\underline{F} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Mit der Eckkreisfrequenz $\omega_e = \frac{1}{RC}$ $\omega_e = \frac{1}{2.5\,\mu F * 2\,k\Omega} = 200\,\frac{1}{s}$

ergibt sich: $\underline{F} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_e}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_e}}$

Aus $\underline{F}$ kann Betrag und Phase angegeben werden:

$$F = \frac{\frac{\omega}{\omega_e}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2}} \qquad \varphi = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)$$

$$F_{dB} = 20 * lg \frac{\frac{\omega}{\omega_e}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2}}$$

Für die Grenzfälle hoher und tiefer Frequenzen ergeben sich für den Betrag die Asymptoten:

tiefe Frequenz	hohe Frequenz
$\omega \ll \omega_e$	$\omega \gg \omega_e$
$1 \gg \frac{\omega}{\omega_e}$	$1 \ll \frac{\omega}{\omega_e}$
$F = \frac{\omega}{\omega_e}$	F = 1
$F(\omega_e) = 1$	$F_{dB} = 0$
$F_{dB}(\omega_e) = 0$	
Steigung: 20 dB/Dekade	Steigung: 0

Für die obigen Grenzfälle sind Potenzfunktion vorhanden, im doppelt logarithmischen Maßstab damit Geraden, die als Näherung auf Arbeitsblatt EGII-15 aufgetragen sind. An der Stelle $\omega = \omega_e$ ergibt sich die Dämpfung F_{dB}:

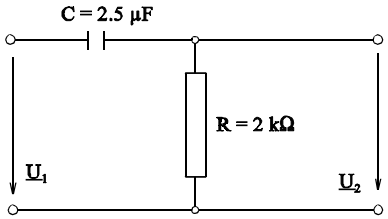
$$F_{dB} = 20\,lg \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = -3\,dB$$

Hier (Filter 1.Ordnung) ist die Eckfrequenz auch die Grenzfrequenz, aber hier die untere Grenzfrequenz:

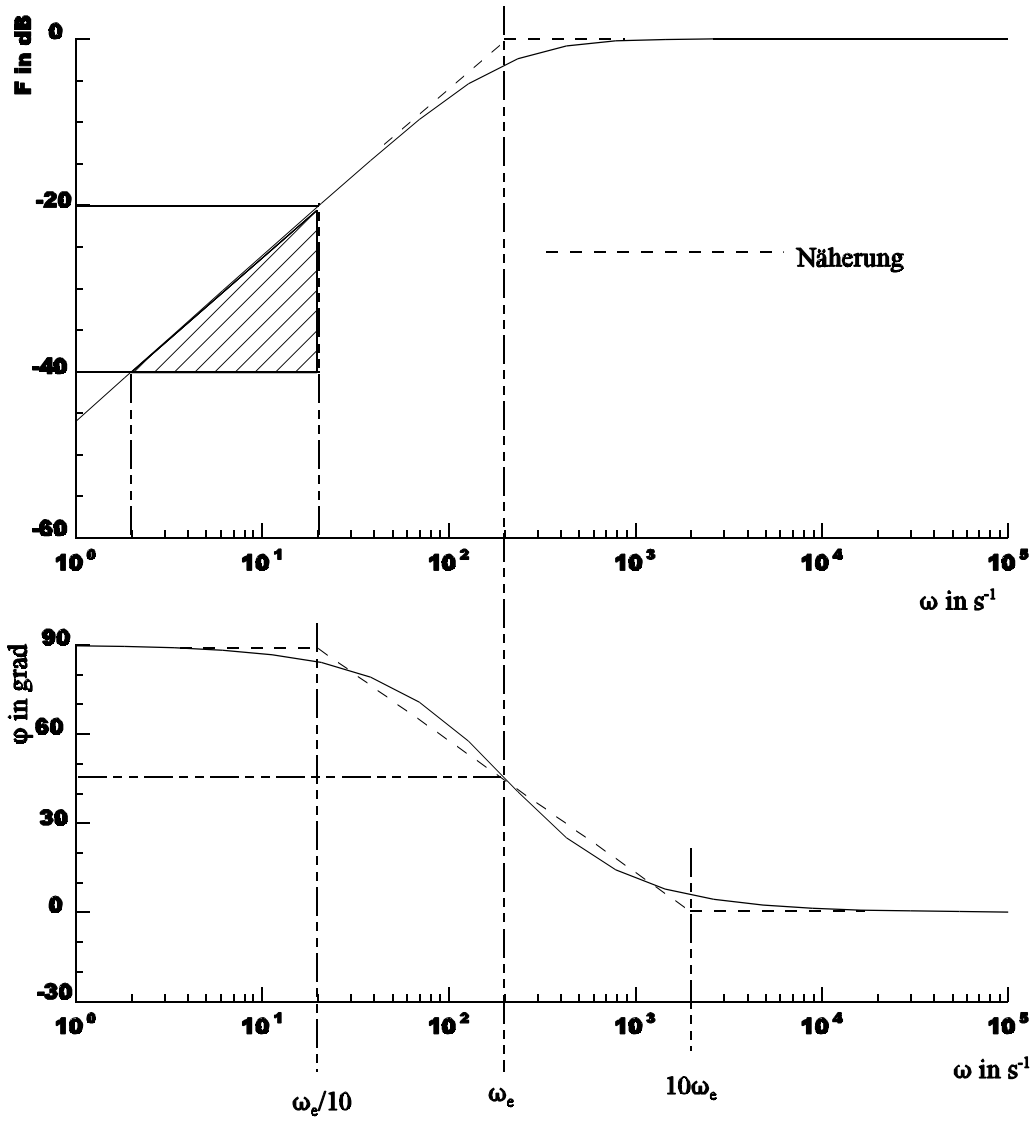
$$f_{grenz} = f_e = \frac{\omega_e}{2\pi}$$

Der Verlauf des Phasenganges kann wieder durch drei Geraden angenähert, siehe Arbeitsblatt EGII-15.

Arbeitsblatt EGII-15: Hochpaß 1. Ordnung



$\omega_e = \frac{1}{R*C} = 200\,\frac{1}{s}$ $f_{gr} = 31.83$ Hz



$$\underline{E}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_e}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_e}} \qquad F_{dB} = 20\ lg\ \frac{\frac{\omega}{\omega_e}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2}} \qquad \varphi = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)$$

Hinweis:

Auch die Schaltung

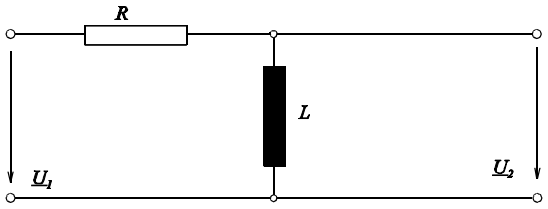


Bild EG6755C

führt zu einem Hochpaß

$$\underline{F} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega L/R}{1 + j\omega L/R} = \frac{j\frac{\omega}{R/L}}{1 + j\frac{\omega}{R/L}}$$

$$\omega_e = \frac{R}{L}$$

$$\underline{F} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_e}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_e}}$$

Damit hat F die gleiche Form als bei der R-C-Schaltung und wirkt als Hochpaß.

6.7.5.6. Bandpaß

Der Frequenzgang der Schaltung nach Arbeitsblatt EGII-16 soll berechnet werden. Zur Vereinfachung ist ein idealer Verstärker zur Entkopplung dazwischen geschaltet. Durch Erweiterung ergibt sich der Frequenzgang aus einem Produkt von Einzelfrequenzgängen:

$$\underline{F} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} * \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3} * \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_4} = \underline{F}_1 * \underline{F}_2 * \underline{F}_3$$

Die Einzelfrequenzgänge sind schon aus den vorhergehenden Kapiteln bekannt. bzw. ist die Verstärkung gegeben

$$\underline{F}_1 = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{e1}}} \qquad \omega_{e1} = \frac{1}{R_1 * C_1} \quad \rightarrow \quad \text{Tiefpaß}$$

$$\underline{F}_2 = 10 \qquad F_2^{dB} = 20\,dB * lg\,(10) = 20\,dB$$

$$\underline{F}_3 = \frac{j\frac{\omega}{\omega_{e3}}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{e3}}} \qquad \omega_{e3} = \frac{1}{R_3 * C_3} \quad \rightarrow \quad \text{Hochpaß}$$

Die Konstruktion der Einzelfrequenzgänge sollte bekannt sein. Das Problem ist, wie erhält man aus den Einzelfrequenzgängen den resultierenden Frequenzgang? Dazu wird Phase und Betrag einzeln betrachtet:

$$\underline{F} = F_1 * e^{j\varphi_1} * F_2 * e^{j\varphi_2} * F_3 * e^{j\varphi_3} = F_1 * F_2 * F_3 * e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)}$$

Der resultierende Betrag ergibt sich aus dem Produkt der Einzelbeträge und der resultierende Winkel aus der Summe der Einzelwinkel:

$F = F_1 * F_2 * F_3 \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$

Im Bode Diagramm wird der Betrag in dB dargestellt. Logarithmieren des Betrages ergibt:

$F_{dB} = 20\ dB * [lg(F_1 *_2 * F_3)] = 20\ dB * lg(F_1) + 20\ dB * lg(F_2) + 20\ dB * lg(F_3)$

$$F_{dB} = F_1^{dB} + F_2^{dB} + F_3^{dB}$$

In logarithmischer Darstellung (F_{dB}) ist die Multiplikation der Beträge auf eine Additionen zurückgeführt. Damit können sowohl Betrag als auch Winkel der Einzelfrequenzgänge im Bodediagramm addiert werden.

Konstruktion Gesamtfrequenzgang

- Einzelfrequenzgänge durch Geraden annähern
- Geraden der Einzelfrequenzgänge abschnittsweise addieren zum Gesamtfrequenzgang.

Berechnung der Bandbreite

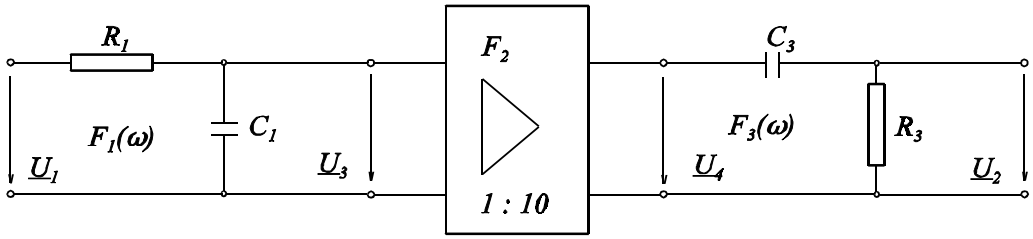
Bei den Eckfrequenzen ω_{e1} und ω_{e2} ist der Betrag jeweils um 3 dB verringert. Damit sind zwei Grenzfrequenzen vorhanden:

$$f_{gr\ unten} = \frac{\omega_{e2}}{2\pi} = 31.8\,Hz$$

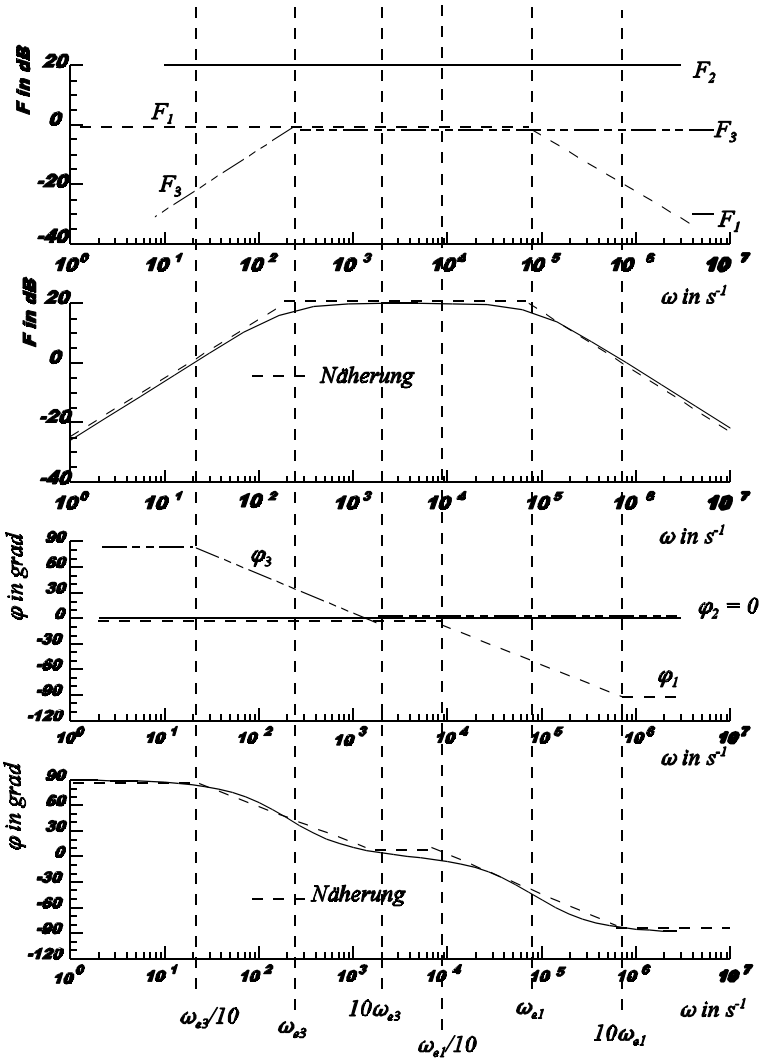
$$f_{gr\ oben} = \frac{\omega_{e1}}{2\pi} = 12.7\,kHz$$

Damit ergibt sich die Bandbreite $f_{Band} = f_{gr\ oben} - f_{gr\ unten} = 12.7$ kHz

Arbeitsblatt EGII-16: Bandpaß



$$\omega_{e3} = \frac{1}{R_3 * C_3} = 200\,\frac{1}{s} \qquad \omega_{e1} = \frac{1}{R_1 * C_1} = 80 * 10^3\,\frac{1}{s}$$



$$\underline{E}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{e1}} * 10 * \frac{j\omega/\omega_{e3}}{1 + j\omega/\omega_{e3}}$$

$$F_{dB} = 20\,dB * lg\,\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{e1})^2}} + 20\,dB + 20\,dB * lg\,\frac{\omega/\omega_{e3}}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{e3})^2}}$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{e1}}\right) + 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{e3}}\right)$$

6.7.5.7. Tiefpaß 2.Ordnung

Der Frequenzgang der verkoppelten Reihenschaltung zweier Tiefpässe nach Arbeitsblatt EGII-17 soll bestimmt und im Bode-Diagramm dargestellt werden.

Der Frequenzgang wird aufgeteilt in

$$\underline{F} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} * \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_3} * = \underline{F}_1 * \underline{F}_2$$

$$\underline{F}_1 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} \qquad \underline{F}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_3}$$

Der Frequenzgang F_2 ist der eines einfachen Tiefpaß nach Kap. 6.7.5.4 in der Schreibweise der Übertragungsfunktion in p:

$$F_2 = \frac{1}{1 + pRC} = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_e}}$$

mit der Eckfrequenz

$$\omega_e = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1\,k\Omega * 1\,\mu F} = 1000\,\frac{1}{s}$$

Die Übertragungsfunktion F_1 läßt sich nach der Spannungsteilerregel bestimmen:

$$F_1 = \frac{Z_3(p)}{R + Z_3(p)} = \frac{1}{RY_3(p) + 1}$$

mit

$$Y_3(p) = pC \parallel \frac{1}{R + \frac{1}{pC}}$$

$$Y_3(p) = pC + \frac{pC}{1 + pRC}$$

$$Y_3(p) = \frac{pC + pCpRC + pC}{1 + pRC} = \frac{1}{R}\frac{2pRC + (pRC)^2}{1 + pRC}$$

$$R * Y_3(p) + 1 = \frac{2pRC + (pRC)^2}{1 + pRC} + 1 = \frac{2pRC + (pRC)^2 + 1 + pRC}{1 + pPC}$$

$$F_1(p) = \frac{1}{RY_3(p) + 1} = \frac{1 + pRC}{(pRC)^2 + 3(pRC) + 1}$$

$$F(p) = F_1(p) * F_2(p) = \frac{1 + pRC}{(pRC)^2 + 3pRC + 1} * \frac{1}{1 + pRC} = \frac{1}{(pRC)^2 + 3pRC + 1}$$

$$F(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_e}\right)^2 + 3\frac{p}{\omega_e} + 1}$$

Die Nullstellen von F(p) ergeben sich als Lösung einer quadratischen Gleichung:

$$P_{01,02} = \omega_e \left[-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1}\right] = \omega_e * [-1.5 \pm 1.118]$$

Der Nenner von F(p) läßt sich mit Hilfe der Nullstellen in Linearfaktoren zerlegen:

$$F(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_e}\right)^2 + 3\frac{p}{\omega_e} + 1} = \frac{1}{\left(\frac{p}{p_{01}} - 1\right)\left(\frac{p}{p_{02}} - 1\right)} = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_{e1}} + 1\right)\left(\frac{p}{\omega_{e2}} + 1\right)}$$

$p_{01} = -\omega_{e1} = -0.382*\omega_e$ $\omega_{e1} = 382\ \frac{1}{s}$ $f_{e1} = 60.8$ Hz

$p_{02} = -\omega_{e2} = -2.618*\omega_e$ $\omega_{e2} = 2618\ \frac{1}{s}$ $f_{e2} = 416.7$ Hz

p wird wieder ersetzt durch jω

$$F(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{e1}}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{e2}}\right)}$$

Konstruktion Bode-Diagramm

Anhand von Arbeitsblatt EGII-17 soll die Konstruktion des oberen Frequenzganges (Bode-Diagramm) erläutert werden. In den Bilder a) und c) werden die Einzelfrequenzgänge

$$\underline{F}_1 = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{e1}}} \qquad \underline{F}_2 = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{e2}}}$$

durch Geraden angenähert.

In den Bilder b) und d) sind die Einzelfrequenzgänge abschnittsweise addiert worden. Die Addition von Geraden ergibt wieder Geraden. Am besten arbeitet man mit der Steigung:

Steigung Frequenzgang

$\omega < \omega_{e1}$	=>	0 dB/Dekade
$\omega_{e1} < \omega < \omega_{e2}$	=>	-20 dB/Dekade
$\omega > \omega_{e2}$	=>	-40 dB/Dekade

Steigung Winkel

$\omega < \omega_{e1}/10$	=>	0°/Dekade
$\omega_{e1}/10 < \omega < \omega_{e2}/10$	=>	-45°/Dekade
$\omega_{e2}/10 < \omega < 10\omega_{e1}$	=>	-90°/Dekade
$10\omega_{e1} < \omega < 10\omega_{e2}$	=>	-45°/Dekade
$\omega > 10\omega_{e2}$	=>	0°/Dekade

Am Einfachsten ist, an einem Punkt die Überlagerung zu beginnen und danach in den einzelnen Abschnitten Geraden einzuzeichnen, wobei die Steigung sich aus der Steigung der Einzelsummen ergibt.

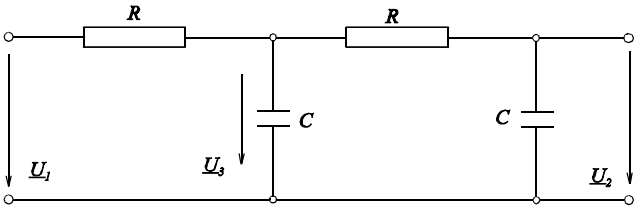
Diskussion des Ergebnisses

Durch die Verkopplung wird die Eckfrequenz aufgespalten in zwei einzelne Eckfrequenzen.

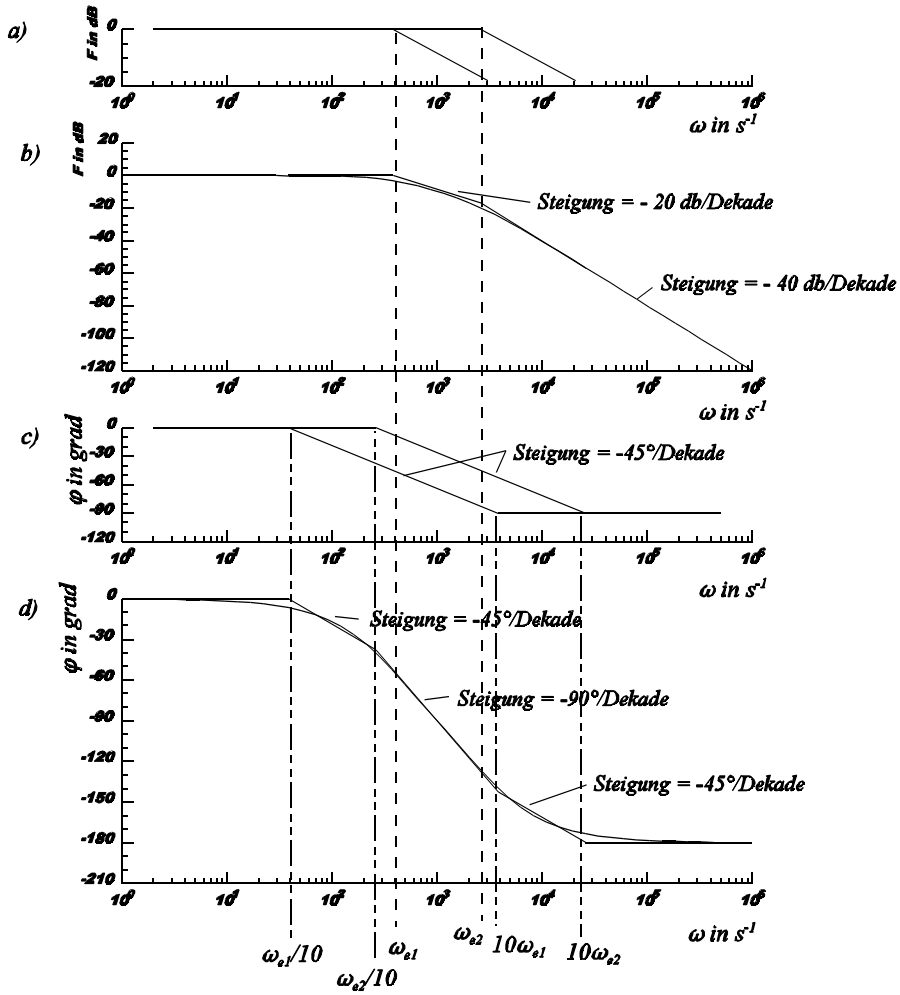
Beim Tiefpaß 1. Ordnung war die Steigung bei hohen Frequenzen -20 dB/Dekade, hier, beim Tiefpaß zweiter Ordnung, beträgt die Steigung -40 dB/Dekade bei hohen Frequenzen.

Der Winkel dreht von 0° bis auf -2*90°, weil Tiefpaß 2. Ordnung.

Arbeitsblatt EGII-17: Tiefpaß 2. Ordnung



R = 1 kΩ C = 1µF $\omega_e = \frac{1}{R*C} = 1000\,\frac{1}{s}$



$\omega_{e1} = 382\ s^{-1}$ $\omega_{e2} = 2618\ s^{-1}$

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{e1}}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{e2}}\right)}$$

$$F_{dB} = -20\,dB\,lg\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{e1}}\right)^2} - 20\,dB\,lg\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{e2}}\right)^2}$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{e1}}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{e2}}\right)$$

6.7.6. Schwingkreise

6.7.6.1. Freie Schwingungen

Am bekanntesten sind die freien Schwingungen am mechanischen Beispiel des Feder-Messe-Systems.

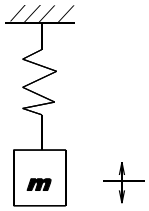


Bild EG6761A

Die Masse pendelt um den Ruhewert der Auslenkung. Dabei erfolgt auch eine Schwingung der Energie. Kinetische Energie und potentielle Energie werden miteinander ausgetauscht.

Was passiert bei der Entladung eines Kondensators auf eine Induktivität?

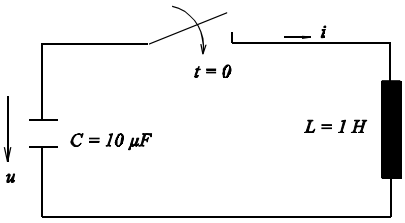


Bild EG6761B

Anschauliche Erklärung:

Wird der Schalter geschlossen, will sich der Kondensator entladen. Da der Strom in der Induktivität sich nicht sprungförmig verändern kann, steigt dieser langsam an. Es erfolgt dabei ein Energieaustausch.

$$w_C = \frac{1}{2}Cu^2(t) \qquad w_L = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

Da die obere Anordnung ideal ist, kann die Energie nur in C oder L vorhanden sein. Ist der Kondensator entladen, weist die Energie in L ein Maximum auf. Die gespeicherte Energie in L wird wieder entladen, dadurch wird der Kondensator mit negativer Spannung aufgeladen, bis der Strom Null wird. Dann ist die Energie wieder vollständig in C vorhanden. Da keine Energie verloren gehen kann, wiederholt sich dieser Vorgang immer in der gleichen Größe, siehe Bild EG6761C.

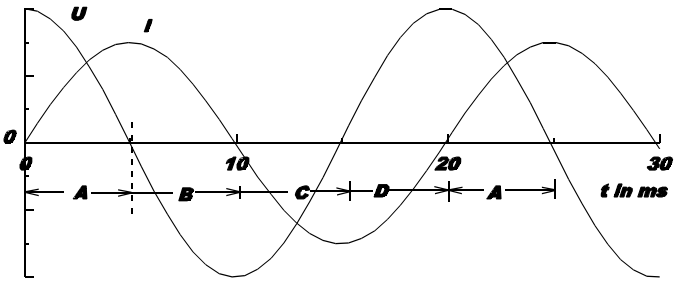


Bild EG6761C

A]	Entladung C (+u)	Aufladung L(+i)
B]	Aufladung C (-u)	Entladung L(+i)
C]	Entladung C (-u)	Aufladung L(-i)
D]	Aufladung C (+u)	Entladung L(-i)

Mathematische Erklärung

$$u_C = -\frac{1}{C}\int i dt \qquad u_L = L * \frac{di}{dt}$$

$u_C = u_L$

$$-\frac{1}{C}\int i dt = L * \frac{di}{dt}$$

$$-i = C * L * \frac{d^2 i}{dt^2}$$

Ansatz: $i(t) = \hat{i} * \sin(\omega_0 t)$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\hat{i} * \omega_0^2 * \sin(\omega t)$$

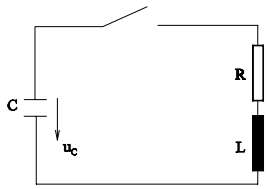
$$-\hat{i} * \sin(\omega t) = C * L * \omega_0^2 * \hat{i} * \sin(\omega t)$$

$1 = C*L*\omega_0$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L*C}}$
$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L*C}}$
$T = \frac{1}{f_0} = 2\pi * \sqrt{L*C}$

Reale freie Schwingungen

In jeder Spule, auch in jedem Kondensator, sind Leiter mit endlichen Widerständen. Dieses wird nach Bild EG6761D durch einen Reihenwiderstand berücksichtigt.



Durch den Widerstand wird Energie in Wärme umgesetzt und damit die Schwingung gedämpft. Die Amplituden der Schwingung nehmen nach einer e-Funktion ab, siehe Bild EG6761E.

Bild EG6761D

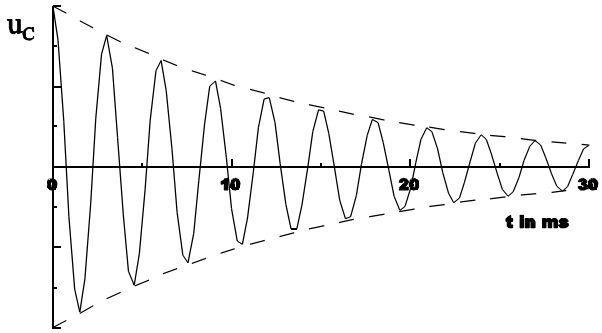


Bild EG6761E

Ein realer Schwingkreis besteht demnach aus den Elementen R, L und C.

Hinweis: Die Frequenz der Eigenschwingungen weicht etwas von der idealen $\omega_0 = 1/\sqrt{L*C}$ ab, siehe Kap. 10, 3. Semester.

6.7.6.2. Erzwungene Schwingungen

Das obere ω_0 wird Eigenfrequenz des Schwingkreises genannt. Nach Bild EG6761D verschwinden die Eigenschwingungen mit der Zeit. In EGII sollen nur eingeschwungene Stromkreise behandelt werden, wo der obere Vorgang abgeklungen ist. Daher sollen in diesem und in den nächsten Abschnitten die erzwungenen Schwingungen behandelt werden.

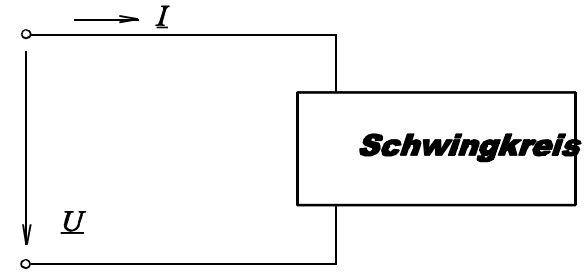


Bild EG6762A

Strom und Spannung sollen an Schwingkreisen untersucht werden. Die freien Schwingungen sind abgeklungen und sollen nicht mehr behandelt werden. Es gibt die zwei Möglichkeiten, die drei Element R, L und C in Reihe oder parallel zu Schalten.

6.7.6.3. Reihenschwingkreis

Für den Reihenschwingkreis nach Bild EG6763A sollen Strom und Spannungen an den einzelnen Elementen diskutiert werden.

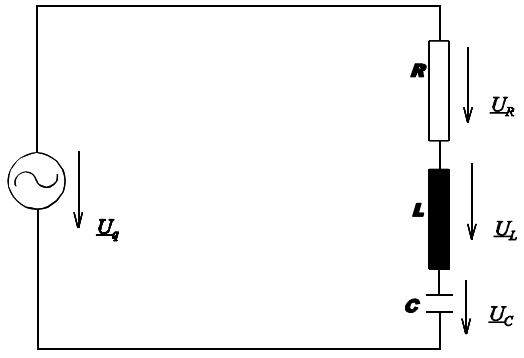


Bild EG6763A

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Die Kreisfrequenz ω wird auf

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L * C}}$$

ω_0 - Realteil gleich Null
- minimaler Betrag des Widerstandes

normiert:

$$\underline{Z} = R + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\,\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 * C}\,\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$\omega_0 L = \frac{L}{\sqrt{L*C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\frac{1}{\omega_0 * C} = \frac{\sqrt{L*C}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega_0 * L = \frac{1}{\omega_0 C} = X_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \text{Definition}$$

$$\underline{Z} = R + j X_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega/\omega_0}\right)$$

$$\underline{Z} = R\left[1 + j\frac{X_0}{R}\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)\right]$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} \text{ - Normierte Frequenz / Kreisfrequenz}$$

$$Q = \frac{X_0}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} \text{ - Güte} \quad Q \gg 1$$

$$\underline{Z} = R\left[1 + jQ\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)\right]$$

Einführung einer normierten komplexen Funktion:

$$\underline{F}(\Omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\Omega - \Omega^{-1}\right)} \qquad \underline{Z} = R*F^{-1}(\Omega)$$

Mit $\underline{U}_q = U_q$ ergibt sich der Strom $\underline{I} = \frac{U_q}{\underline{Z}} = \frac{U_q}{R}\frac{1}{1 + jQ\left(\Omega - \Omega^{-1}\right)} = \frac{U_q}{R}\underline{F}(\Omega)$

Für die Berechnung der physikalischen Größen sind demnach die normierten Funktionen $F(\Omega)$ und $F^{-1}(\Omega)$ zu untersuchen. Auf Arbeitsblatt EGII-18 sind dargestellt

- $\underline{F}$ nach Betrag und Phase (Q = 2, 5, 10)
- Ortskurve $\underline{F}^{-1}$ (Q = 2, 10)
- Ortskurve F (Q = 2, 10)

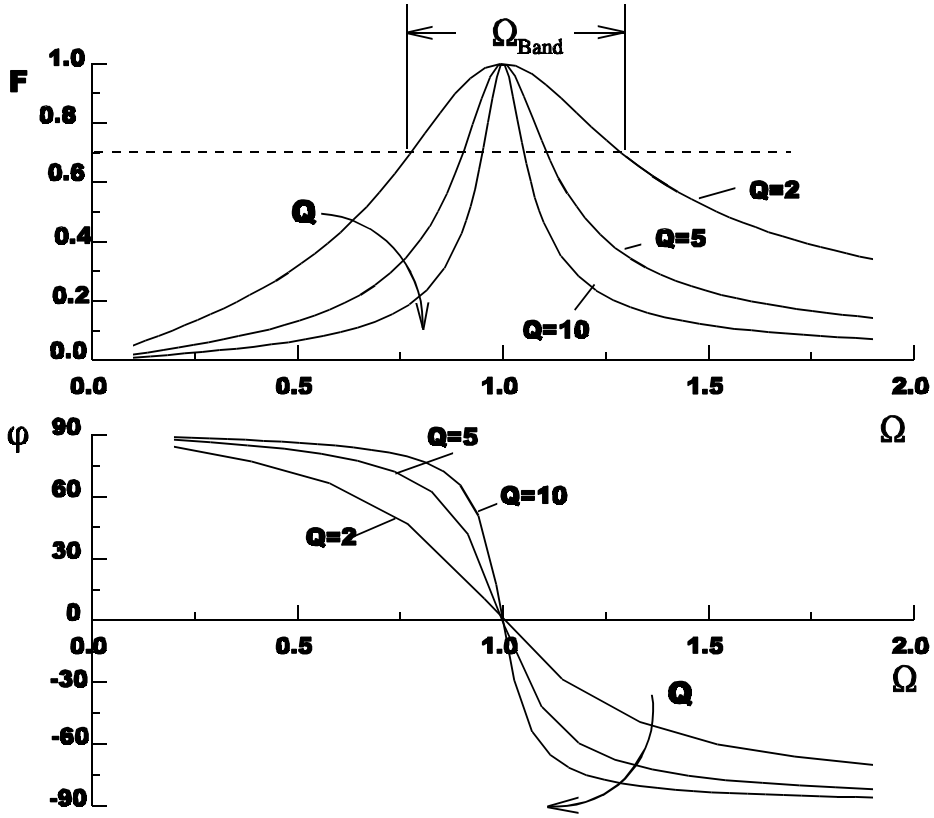
$$\underline{U}_R = R*\underline{I} = U_q*F(\Omega) = U_q*\frac{1}{1 + jQ\left(\Omega - \Omega^{-1}\right)}$$

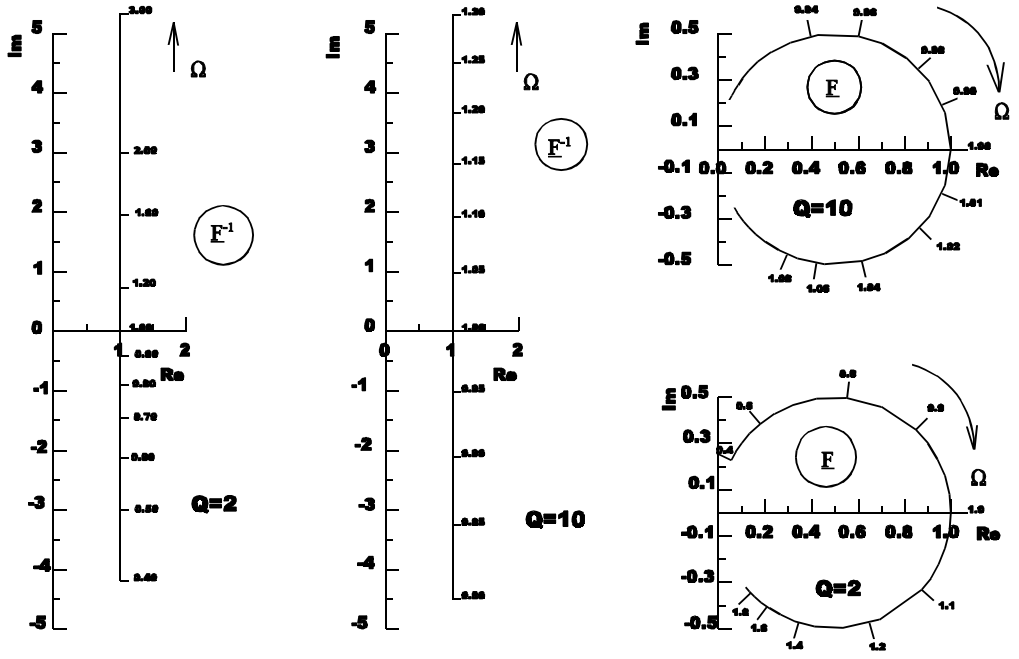
$$\underline{U}_L = j\omega L\underline{I} = j\frac{\omega}{\omega_0}\,\omega_0\,L\underline{I} = j\Omega*X_0*\frac{U_q}{R}*\frac{1}{1 - jQ\left(\Omega - \Omega^{-1}\right)} = U_q\frac{j\Omega*Q}{1 - jQ\left(\Omega - \Omega^{-1}\right)}$$

$$\underline{U}_C = \frac{\underline{I}}{j\omega C} = -j\frac{\omega_0}{\omega}\,\frac{1}{\omega_0 C}\,\underline{I} = -j\Omega^{-1}*X_0*\frac{U_q}{R}*\frac{1}{1 - jQ\left(\Omega - \Omega^{-1}\right)} = U_q\frac{-j\,\Omega^{-1}Q}{1 - jQ\left(\Omega - \Omega^{-1}\right)}$$

Arbeitsblatt EGII-18

$$\underline{F}(\Omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)} = F * e^{j\varphi}$$





Die Ortskurve von $\underline{F}^{-1}$ ist eine Gerade mit nichtlinearer Teilung. Achtung: keine Halbgerade. Damit ergibt sich $\underline{F}$ als Inversion von $\underline{F}^{-1}$ zu einen Kreis. Je höher die Güte ist, desto näher sind die Ω-Werte den Wert 1. Je größer die Güte ist, desto schmalbandiger ist der Betrag von F in Abhängigkeit von Ω. Die Bandbreite ergibt sich aus den Stellen an denen F den Wert $1/\sqrt{2}$ aufweist:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + j\left[Q\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)\right]^2}}$$

$$2 = 1 + Q^2 * \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)^2$$

$$1 = Q^2 * \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)^2$$

$$\pm 1 = Q * \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)$$

$$\Omega - \frac{1}{\Omega} \mp \frac{1}{Q} = 0$$

$$\Omega^2 \mp \frac{1}{Q} * \Omega - 1 = 0$$

$$\Omega_{12} = \pm \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}$$

Real existierende Frequenzen können nur positiv sein. Wird dieses berücksichtigt, fallen zwei der oberen vier Lösungen weg und man erhält die Lösungen:

$$\Omega_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}$$

$$\Omega_2 = +\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}$$

$$\Omega_{Band} = \Omega_2 - \Omega_1$$

$$\boxed{\Omega_{Band} = \frac{1}{Q}}$$

$$\omega_{Band} = \omega_0 * \Omega_{Band} \qquad f_{Band} = \frac{\omega_{Band}}{2\pi}$$

$$\boxed{f_{Band} = \frac{\omega_0}{2\pi * Q}}$$

Die Bandbreite eines Schwingkreis ist umgekehrt proportional zur Güte

$$\boxed{f_{gr12} = \left(\mp \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}\right) \frac{\omega_0}{2\pi}}$$

Beispiel:

Für den auf Arbeitsblatt EGII-19 dargestellten Reihenschwingkreis sind zu berechnen bzw. darzustellen in der komplexen Ebene:

a) die Resonanzkreisfrequenz $\boldsymbol{\omega_0}$
b) die Resonanzfrequenz $\mathbf{f_0}$
c) die Güte $\mathbf{Q_0}$
d) die Bandbreite der Kreisfrequenz $\boldsymbol{\omega_{Band}}$
e) die Bandbreite der Frequenz $\mathbf{f_{Band}}$
f) die zwei Grenzfrequenzen $\mathbf{f_{gr1}}$ und $\mathbf{f_{gr2}}$
g) den Strom $\mathbf{I}$
h) die Spannung $\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{R}$ allgemein
i) die Spannung $\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{L}$ allgemein
j) die Spannung $\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{C}$ allgemein
k) Zahlenwerte für $\omega = \omega_{gr1}$ der Aufgabenpunkte h bis j

a) $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L*C}} = \frac{1}{\sqrt{10*10^{-3}\,H*10*10^{-9}\,F}} = 100*10^3\,\frac{1}{s}$$

b) $$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 15.92\,kHz$$

c) $$X_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{10*10^{-3}\,H}{10*10^{-9}\,F}} = 1000\,\Omega \qquad Q = \frac{X_0}{R} = \frac{1000\,\Omega}{100\,\Omega} = 10$$

d) $$\omega_{Band} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{100*10^3\,1/s}{10} = 10*10^3\,\frac{1}{s}$$

e) $$f_{Band} = \frac{\omega_{Band}}{2\pi} = 1.59\,kH$$

f) $$\omega_{gr12} = \left(\mp\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}\right)\omega_0 \qquad \omega_{gr12} = \left(\pm\frac{1}{2*10} + \sqrt{\left(\frac{1}{2*10}\right)^2 + 1}\right)*100*10^3\,\frac{1}{s}$$

$$\omega_{gr12} = (100.12 \mp 5)*10^3\,\frac{1}{s} \qquad \omega_{gr1} = 95.12\,\frac{1}{s}\quad \omega_{gr2} = 105.15\,\frac{1}{s}$$

$$f_{gr1} = \frac{\omega_{gr1}}{2\pi} = 15.14\,kHz \qquad f_{gr2} = 16.73\ \text{kHz}$$

g) $$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = U_q\frac{j\omega C}{Rj\omega C + (j\omega)^2 LC + 1}$$

h) $$\underline{U}_R = R*\underline{I} = U_q\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

i) $$\underline{U}_L = j\omega L*\underline{I} = U_q\frac{(j\omega)^2 LC}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

j) $$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C}*\underline{I} = U_q\frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

k) $$\underline{U}_R = 10\,V * \frac{j95.12 * 10^3 \frac{1}{s} * 100\,\Omega * 10^{-8}\,F}{1 + j95.12 * 10^3 \frac{1}{s} * 100\,\Omega * 10^{-8} F + \left(j95.12 * 10^3 \frac{1}{s}\right)^2 * 0.01\,H * 10^{-8}\,F}$$

$$\underline{U}_R = 10\,V * \frac{j0.09512}{1 + j0.09512 - 0.9048} = 10\,V * \frac{j0.09512}{0.0952 + j0.09512} = 5\,V + j5\,V = 7.07\,V\angle 45^\circ$$

$$\underline{U}_L = 10\,V * \frac{-0.9048}{0.0952 + j0.09512} = (-47.5 + 47.5)\,V = 67.2\,V\angle 135^\circ$$

$$\underline{U}_C = 10\,V * \frac{1}{0.0952 + j0.09512} = (52.5 + 52.5)\,V = 74.3\,V\angle -45^\circ$$

Alternative Berechnung

$$\underline{Z} = R\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] = R\frac{1}{F(\Omega)}$$

$$\underline{I} = \frac{U_q}{\underline{Z}} = \frac{U_q}{R}\frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{U_q}{R} * F(\Omega)$$

$$\underline{U}_R = \underline{I} * R = U_q \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = U_q * F(\Omega)$$

$$\underline{U}_L = \underline{I} * j\omega L = \underline{I} * j\frac{\omega}{\omega_0} L\omega_0 = \underline{I} * X_0 * j\frac{\omega_0}{\omega} = \underline{U}_q \frac{jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I}\frac{1}{j\omega C} = \underline{I}\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{C\omega_0}} = -\underline{I} * X_0 * j\frac{\omega_0}{\omega} = -\underline{U}_q \frac{jQ\frac{\omega_0}{\omega}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

f_{gr1} => $\frac{\omega}{\omega_0} = 0.9512$ Q = 10

$$1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = 1 + j10\left(0.9512 - \frac{1}{0.9512}\right) = 1 - j1 = \sqrt{2}\,\angle -45^\circ$$

$$\underline{I} = \frac{10\,V}{100\,\Omega}\frac{1}{1 - j1} = 70.7\,mA\,\angle 45^\circ$$

$$\underline{U}_R = \frac{10\,V}{1 - j1} = 7.07\,V\,\angle 45^\circ$$

$$\underline{U}_L = 10\,V\frac{j10 * 0.9512}{1 - j1} = 67.3\,V\,\angle 135^\circ$$

$$\underline{U}_C = -10\,V\frac{j10 * (0.9512)^{-1}}{1 - j1} = 74.3\,V\,\angle -45^\circ$$

Diskussion der Ergebnisse:

Der Blindanteil aus L und C bestehend

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

ist von der Frequenz abhängig. Es gilt:

$\omega < \omega_0$	=>	$X < 0$	=>	Kapazitive Last	=>	$\varphi < 0$
$\omega = \omega_{gr1}$	=>	$X = -R$	=>			$\varphi = -45^\circ$
$\omega = \omega_0$	=>	$X = 0$	=>	rein ohmsche Last	=>	$\varphi = 0$
$\omega = \omega_{gr2}$	=>	$X = R$	=>			$\varphi = 45^\circ$
$\omega > \omega_0$	=>	$X > 0$	=>	induktive Last	=>	$\varphi > 0$

$\varphi_{UL} = \varphi_{UR} + 90^\circ$ weil $\underline{U}_L = j\omega L * \underline{I}$

$\varphi_{UC} = \varphi_{UR} - 90^\circ$ weil $\underline{U}_C = \frac{\underline{I}}{j\omega C}$

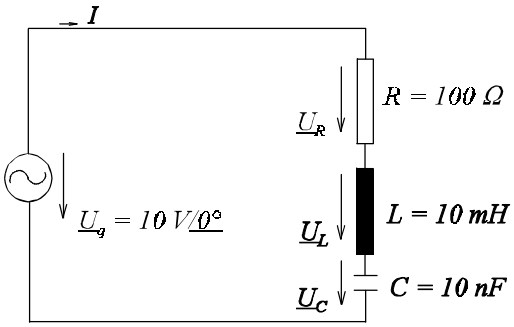
$\omega = \omega_0$ => I, U_R maximal

Resonanz: $\omega = \omega_0$

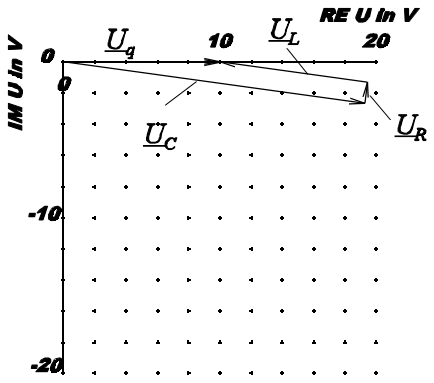
Je näher die Kreisfrequenz ω_0 erreicht, um so größer wird der Strom. Für Resonanz gilt:

$\omega = \omega_0$
$X = 0$
$\varphi = 0$
$\underline{U}_R = \underline{U}_q$
$\underline{U}_C = -\underline{U}_L$
$U_L = U_C = Q * U_q$

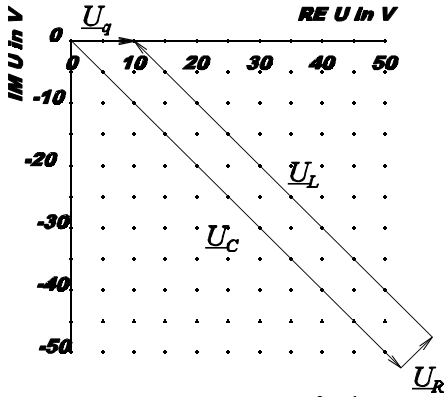
Arbeitsblatt EGII-19



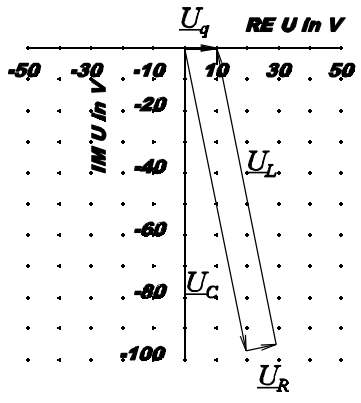
$\omega_0 = 100*10^3\ s^{-1}$
Q = 10
$\omega_{Band} = 10*10^3\ s^{-1}$
$\omega_{gr1} = 95.1*10^3\ s^{-1}$
$\omega_{gr2} = 105.1*10^3\ s^{-1}$



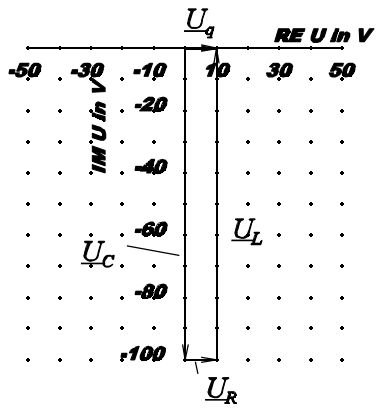
a) $\omega = 70*10^3\ s^{-1}$



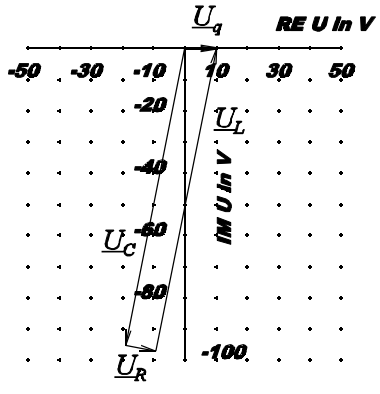
b) $\omega = = \omega_{g1}\ 95.1*10^3\ s^{-1}$



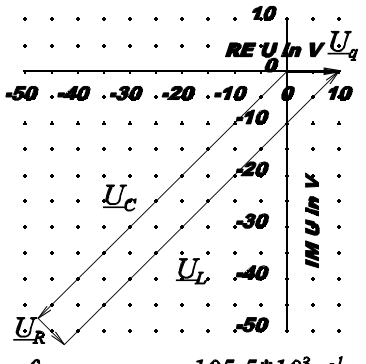
c) $\omega = 99*10^3\ s^{-1}$



d) $\omega = \omega_0 = 100*10^3\ s^{-1}$



e) $\omega = 101*10^3\ s^{-1}$



f) $\omega = \omega_{g2} = 105.5*10^3\ s^{-1}$

6.7.6.4. Parallelschwingkreis

Für den Parallelschwingkreis nach Bild EG6764A soll der Verlauf der Spannung U diskutiert werden.

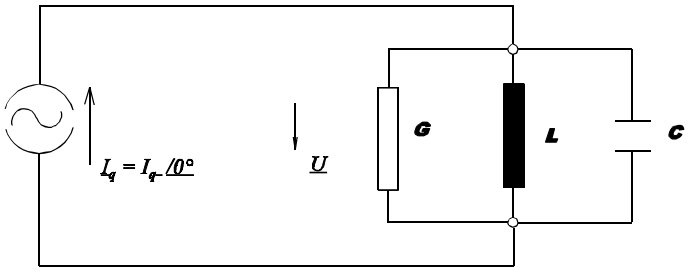


Bild EG6764A

$$\underline{Y} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Die Kreisfrequenz wird auf

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L*C}} \qquad \omega_0 LC = 1$$

normiert: $$\underline{Y} = G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} * C * \frac{1}{\sqrt{L*C}} - \frac{\omega_0}{\omega}\frac{\sqrt{L*C}}{L}\right) = G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} * \sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{\omega_0}{\omega} * \sqrt{\frac{L}{C}}\right)$$

mit $$Y_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{X_0}$$

ergibt sich: $$\underline{Y} = G + jY_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

Mit $Y_0 = G*Q$ => $$Q = \frac{Y_0}{G} = R * \sqrt{\frac{C}{L}}$$

und $$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

kann man angeben: $$\underline{Y} = G\left[1 + jQ\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)\right]$$

Die Spannung $\underline{U}$ kann berechnet werden: $$\underline{U} = \frac{\underline{I_q}}{\underline{Y}} = \frac{I_q}{G} * \frac{1}{1 + jQ\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)}$$

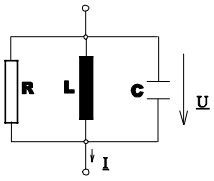
Der rechte Teil des oberen Ausdrucks ist schon vom Reihenschwingkreis her bekannt, die auf Arbeitsblatt EGII-18 dargestellten Funktionen:

$$F = \frac{1}{1 + jQ\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)}$$

$\underline{U} = I_q * R * F(\Omega)$

Arbeitsblatt EGII-20

6.7.6.5. Vergleich: Reihen- und Parallelschwingkreis

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L*C}}$$</td></tr>
<tr><td>$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$</td><td>$$Q = R*\sqrt{\frac{C}{L}}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$$
$$\underline{F}(\Omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grenzfrequenzen
$$f_{gr1,2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L*C}}\left(\mp\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}\right)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Bandbreite
$$f_{Band} = \frac{f_0}{Q} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L*C}*Q}$$</td></tr>
<tr><td>$$\underline{Z} = R*\left[1 + jQ\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)\right]$$
$$\underline{Y} = \frac{1}{R}*\underline{F}(\Omega)$$
$\underline{Z} = R*\underline{F}^{-1}(\Omega)$</td><td>$$\underline{Z} = R*\frac{1}{1 + jQ\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)}$$
$\underline{Z} = R*F(\Omega)$
$$\underline{Y} = \frac{1}{R}*\underline{F}^{-1}(\Omega)$$</td></tr>
<tr><td>Resonanz: ($\omega = \omega_0$, $\Omega = 1$)
$U_L = U_C = Q*U_R$
$\underline{U}_R = \underline{U}$
$\underline{U}_L = jQ*\underline{U}$ $\underline{U}_C = -\underline{U}_L = -jQ*\underline{U}$
$\underline{Z} = R$</td><td>Resonanz: ($\omega = \omega_0$, $\Omega = 1$)
$I_L = I_C = Q*I_R$
$\underline{I}_R = \underline{I}$
$\underline{I}_C = jQ*\underline{I}$ $\underline{I}_L = -\underline{I}_C = -jQ*\underline{I}$
$\underline{Z} = R$</td></tr>
<tr><td>$\omega \ll \omega_0$, $\omega \gg \omega_0$
$Z \gg R$</td><td>$\omega \ll \omega_0$, $\omega \gg \omega_0$
$Z \ll R$</td></tr>
<tr><td>Fazit:
Q groß => R klein =>
Kurzschluß bei Resonanz
Leerlauf außerhalb Resonanz</td><td>Fazit:
Q groß => R groß =>
Leerlauf bei Resonanz
Kurzschluß außerhalb Resonanz</td></tr>
</table>

6.8. Lineare Wechselstrom-Netze

6.8.1. Einleitung

6.8.1.1. Unterschied: Gleichstrom- Wechselstromrechnung

Bei der Berechnung von Gleichstromnetzen wurden im Kap. 3 (1. Semester) die folgenden Berechnungsverfahren vorgestellt:

3.1. Einleitung
3.2. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze
3.3. Maschenstrom-Verfahren
3.4. Netz-Umwandlung
 3.4.1. Ersatzwiderstand
 3.4.2. Quellenumwandlung
 3.4.3. Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung
 3.4.4. Verlegung idealer Strom-Quellen
 3.4.5. Umwandlung idealer Quellen
3.5. Überlagerungssatz
3.6. Ersatzquelle
3.7. Knotenpunkt-Potential-Verfahren
3.8. Symmetrie-Überlegungen

Alle oberen Verfahren zur Netzberechnung können auch zur Wechselstromberechnung angewandt werden. Dazu soll der Unterschied zwischen der Gleichstrom- und der Wechselstromrechnung noch einmal hervorgehoben werden.

Bei der Gleichstromberechnung ist jede Größe ein reeller Parameter zugeordnet.

Beispiel:

$U_5 = 20\ V$ $I_5 = 2\ A$ $R_5 = 10\ \Omega$

Bei der linearen Wechselstromrechnung ergeben sich harmonische Größen, z. B.

$u_5(t) = \hat{u}_5 * \cos(\omega t + \varphi_{u5})$
$i_5(t) = \hat{i}_5 * \cos(\omega t + \varphi_{i5})$

die durch Betrag und Phase bei einer bestimmten Frequenz ausreichend beschrieben werden. Jede Größe wird nicht im Zeitverlauf betrachtet, sondern die zu den oberen Größen zugehörigen Effektivwertzeiger werden betrachtet:

$$\underline{U}_5 = \frac{\hat{u}_5}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_{u5}} = U_5 * e^{j\varphi_{u5}} \qquad U_5 = \frac{\hat{u}_5}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\hat{i}_5}{\sqrt{2}} * e^{j\varphi_{i5}} = I_5 * e^{j\varphi_{i5}} \qquad I_5 = \frac{\hat{i}_5}{\sqrt{2}}$$

Das ohmsche Gesetz für den Wechselstromkreis lautet:

$\underline{U} = \underline{Z} * \underline{I}$ $\qquad$ $\underline{U} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}}$

Der komplexe Widerstand bzw. Leitwert ergibt sich

$\underline{Z} = R + jX$ $\qquad$ $\underline{Y} = G + jY$

Einen Überblick zeigt Tabelle EG6811A

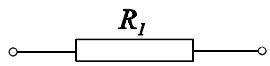
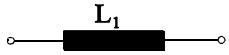
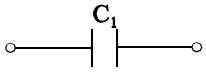
	$\underline{Z} = R_1$	$R = R_1$ $X = 0$	$\underline{Y} = \frac{1}{R_1}$	$G = \frac{1}{R_1}$ $B = 0$
	$\underline{Z} = j\omega L_1 = jX$	$R = 0$ $X = \omega L_1$	$\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L_1} = jB$	$G = 0$ $B = -\frac{1}{\omega L_1}$
	$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C_1} = jX$	$R = 0$ $X = -\frac{1}{\omega C_1}$	$\underline{Y} = j\omega_1 C_1 = jB$	$G = 0$ $B = \omega C_1$

Tabelle EG6811A

Nach Tabelle EG681A ergibt sich für jedes passives Element ein komplexer Widerstand oder Leitwert, der wie die Spannung oder die Ströme aus jeweils zwei Komponenten bestehen.

Damit können nun alle Gesetze des Gleichstroms auf Wechselstrom übertragen werden. Nur muß hier mit komplexen Variablen und Zahlen gerechnet werden.

In den nächsten Abschnitten soll behandelt werden:

- Tips für das komplexe Rechnen mit den Taschenrechner werden in Abschnitt 6.8.2 gegeben.
- Die Gleichstrom-Verfahren aus Kap. 3 unterscheiden sich grob in welche mit und ohne Gleichungssystem zu lösen. Die Behandlung komplexer Gleichungssysteme wird in Abschnitt 6.8.3 aufgezeigt.
- In den folgenden Abschnitten erfolgt eine Wiederholung der Gleichstrom-Methoden, angewandt an Wechselstrom-Beispielen.

6.8.2. Komplexe Tips für den Taschenrechner

Nachdem im ersten Semester die Grundlagen der komplexen Rechnung erarbeitet wurden, sollen im zweiten Semester folgende Operationen per Knopfdruck vom Rechner ausgeführt werden, die als Minimalforderung an einen Taschenrechner zu stellen sind (evtl. zu programmieren)

- Eingabe komplexer Zahlen
- Umwandlung komplexer Zahlen (kartesisch-polar)
- Multiplikation, Division, Addition, Subtraktion sollen nicht mehr manuell per Komponenten ausgeführt werden.

Zusätzlich nützliche Optionen wären von Vorteil:
- Speicherung komplexer Zahlen (gut: unter Namen)

Optimal wäre ein Rechner wie z.B. der HP48, der die folgenden zusätzlichen idealen Möglichkeiten bietet:
- Speicherung komplexer Variabler, Vektoren und Matrizen mit speziellen Namen
- Aufruf der Variablen durch Menü oder Namen
- komplexe Matrizen und Vektorrechnung
- Inversion komplexer Matrizen
- Lösung komplexer Gleichungssysteme

6.8.3. Komplexe Gleichungssysteme

Wiederholung: Das reelle Gleichungssystem hat in Matrix-Schreibweise die Form:

$$\bar{A} * \bar{x} = \bar{k}$$

Der Strich zur Kennzeichnung von Matrizen und Vektoren wurde mit Absicht über dem Symbol gewählt. Für den Fall zweiter Ordnung ergaben sich die Komponenten:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \bar{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Bei der Wechselstromrechnung müssen alle Elemente (Zahlen, Konstanten, Variable, Vektoren und Matrizen) zu komplexen Elementen erweitert werden. Für das obere Gleichungssystem im Komplexen ergibt sich:

$$\underline{\bar{A}} * \underline{\bar{x}} = \underline{\bar{k}}$$

Strich drunter => komplex
Strich drüber => Matrix, Vektor

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{k}_1 \\ \underline{k}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{re} + j a_{11}^{im} & a_{12}^{re} + j a_{12}^{im} \\ a_{21}^{re} + j a_{21}^{im} & a_{22}^{re} + j a_{22}^{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{re} + j x_1^{im} \\ x_2^{re} + j x_2^{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^{re} + j k_1^{im} \\ k_2^{re} + j k_2^{im} \end{pmatrix}$$

mit den Komponenten

$$\underline{\bar{A}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{re} + j a_{11}^{im} & a_{12}^{re} + j a_{12}^{im} \\ a_{21}^{re} + j a_{21}^{im} & a_{22}^{re} + j a_{22}^{im} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{re} + j x_1^{im} \\ x_2^{re} + j x_2^{im} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\bar{k}} = \begin{pmatrix} \underline{k}_1 \\ \underline{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^{re} + j k_1^{im} \\ k_2^{re} + j k_2^{im} \end{pmatrix}$$

Das Aufstellen dieses Gleichungssystems wird später erläutert. In diesem Abschnitt soll deren Lösung diskutiert werden. Falls ein Rechner mit Programm zur Verfügung steht, der komplexe lineare Gleichungssysteme lösen kann, ist keine weiter Arbeit erforderlich, außer der Eingabe von $\underline{\bar{A}}$ und $\underline{\bar{k}}$.

Viele Rechner haben die Möglichkeit, reelle lineare Gleichungssysteme zu lösen. Die Umformung zu einem reellen Gleichungssystem erfolgt durch Aufspaltung der Matrizen und Vektoren in reelle Matrizen und Vektoren.

$$\underline{\bar{A}} = \bar{A}^{re} + j\bar{A}^{im} = \begin{pmatrix} a_{11}^{re} & a_{12}^{re} \\ a_{21}^{re} & a_{22}^{re} \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} a_{11}^{im} & a_{11}^{im} \\ a_{21}^{im} & a_{22}^{im} \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}^{re} = \begin{pmatrix} a_{11}^{re} & a_{12}^{re} \\ a_{21}^{re} & a_{22}^{re} \end{pmatrix} \qquad \bar{A}^{im} = \begin{pmatrix} a_{11}^{im} & a_{11}^{im} \\ a_{21}^{im} & a_{22}^{im} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\bar{x}} = \bar{x}^{re} + j\bar{x}^{im} = \begin{pmatrix} x_1^{re} \\ x_2^{re} \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} x_1^{im} \\ x_2^{im} \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}^{re} = \begin{pmatrix} x_1^{re} \\ x_2^{re} \end{pmatrix} \qquad \bar{x}^{im} = \begin{pmatrix} x_1^{im} \\ x_2^{im} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\bar{k}} = \bar{k}^{re} + j\bar{k}^{im} = \begin{pmatrix} k_1^{re} \\ k_2^{re} \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} k_1^{im} \\ k_2^{im} \end{pmatrix}$$

$$\bar{k}^{re} = \begin{pmatrix} k_1^{re} \\ k_2^{re} \end{pmatrix} \qquad \bar{k}^{im} = \begin{pmatrix} k_1^{im} \\ k_2^{im} \end{pmatrix}$$

Damit läßt sich das komplexe Gleichungssystem $\underline{\bar{A}} * \underline{\bar{x}} = \underline{\bar{k}}$

umschreiben in $(\bar{A}_{re} + \bar{A}_{im}) * (\bar{x}_{re} + j\bar{x}_{im}) = \bar{k}_{re} + j\bar{k}_{im}$

Ausmultipliziert ergibt sich: $\bar{A}_{re} * \bar{x}_{re} + j\bar{A}_{im} * \bar{x}_{re} + j\bar{A}_{re} * \bar{x}_{im} - \bar{A}_{im} * \bar{x}_{im} = \bar{k}_{re} + j\bar{k}_{im}$

$$(\bar{A}_{re} * \bar{x}_{re} - \bar{A}_{im} * \bar{x}_{im}) + j(\bar{A}_{im} * \bar{x}_{re} + \bar{A}_{re} * \bar{x}_{im}) = \bar{k}_{re} + j\bar{k}_{im}$$

Komplexe Zahlen bzw. Gleichungen sind nur gleich, wenn Realteil und Imaginärteil identisch sind. Die obere Gleichung wird dadurch Aufspalten in zwei Gleichungen

Realteil => $\bar{A}_{re} * \bar{x}_{re} - \bar{A}_{im} * \bar{x}_{im} = \bar{k}_{re}$

Imaginärteil => $\bar{A}_{im} * \bar{x}_{re} + \bar{A}_{re} * \bar{x}_{im} = \bar{k}_{im}$

Damit ergibt sich ein Gleichungssystem 2.Ordnung für die Vektoren $\bar{x}_{re}$ und $\bar{x}_{im}$. Die Variablen und Teilmatrizen können wie reelle Variable behandelt werden und zu einem Gleichungssystem zusammengefaßt werden.

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_{re} & -\bar{A}_{im} \\ \bar{A}_{im} & \bar{A}_{re} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_{re} \\ \bar{x}_{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{k}_{re} \\ \bar{k}_{im} \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich mit den erweiterten Matrizen und Vektoren

$$\bar{A}_{erw} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{re} & -\bar{A}_{im} \\ \bar{A}_{im} & \bar{A}_{re} \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_{erw} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{re} \\ \bar{x}_{im} \end{pmatrix} \qquad \bar{k}_{erw} = \begin{pmatrix} \bar{k}_{re} \\ \bar{k}_{im} \end{pmatrix}$$

auch ein erweitertes Gleichungssystem: $\bar{A}_{erw} * \bar{x}_{erw} = \bar{k}_{erw}$

Die Dimension der Erweiterung ist doppelt so groß, als die des komplexen Gleichungssystems.

Für das schon erwähnte komplexe Gleichungssystem 2. Ordnung ergibt mit

$$\underline{\bar{A}}_{erw} = \begin{pmatrix} a_{11}^{re} & a_{12}^{re} & -a_{11}^{im} & -a_{12}^{im} \\ a_{21}^{re} & a_{22}^{re} & -a_{21}^{im} & -a_{22}^{im} \\ a_{11}^{im} & a_{12}^{im} & a_{11}^{re} & a_{12}^{re} \\ a_{21}^{im} & a_{12}^{im} & a_{21}^{re} & a_{12}^{re} \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_{erw} = \begin{pmatrix} x_1^{re} \\ x_2^{re} \\ x_1^{im} \\ x_2^{im} \end{pmatrix} \qquad \bar{k}_{erw} = \begin{pmatrix} k_1^{re} \\ k_2^{re} \\ k_1^{im} \\ k_2^{im} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{re} & a_{12}^{er} & -a_{11}^{im} & -a_{12}^{im} \\ a_{21}^{re} & a_{22}^{re} & -a_{21}^{im} & -a_{22}^{im} \\ a_{11}^{im} & a_{12}^{im} & a_{11}^{re} & a_{12}^{re} \\ a_{21}^{im} & a_{12}^{im} & a_{21}^{re} & a_{12}^{re} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1^{re} \\ x_2^{re} \\ x_1^{im} \\ x_2^{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^{re} \\ k_2^{re} \\ k_1^{im} \\ k_2^{im} \end{pmatrix}$$

Damit ist ein reelles Gleichungssystem 4. Ordnung (doppelter Ordnung als das komplexe für die Variablen x_1^{re}, x_2^{re}, x_1^{im} und x_2^{im} entstanden.

Schema: Umformung komplexes Gleichungssystem in ein reelles Gleichungssystem

gegeben: komplexes Gleichungssystem n. Ordnung.

$$\underline{\bar{A}} * \bar{x} = \bar{k}$$

A] Reelles Gleichungssystem der Ordnung 2n aufstellen.

$$\bar{A}_{erw} * \bar{x}_{erw} = \bar{k}_{erw}$$

B] Die Matrix $\bar{A}_{erw}$ in vier gleiche Teile aufspalten.

C] Den Realteil von $\underline{\bar{A}}$, $Re\{\underline{\bar{A}}\}$, in der Hauptdiagonalen positiv eintragen, oben links und unten rechts.

D] Der Imaginärteil von $\underline{\bar{A}}$, $Im\{\underline{\bar{A}}\}$, wandert in die Nebendiagonalen, unten links mit positiven Vorzeichen und oben rechts mit negativen Vorzeichen.

E] Variablenvektor $\bar{x}_{erw}$ und Anregungsvektor $\bar{k}_{erw}$ in zwei Teile aufspalten. Den Realteil $Re\{\underline{\bar{x}}\}$ bzw. $Re\{\underline{\bar{k}}\}$ jeweils oben eintragen und den Imaginärteil $Im\{\underline{\bar{x}}\}$, bzw. $Im\{\underline{\bar{k}}\}$ unten eintragen.

F] Reelles Gleichungssystem lösen

G] Komplexe Variablen ergeben sich aus Real- und Imaginärteil.

$$\underline{\bar{x}} = \bar{x}^{re} + j\bar{x}^{im}$$

Studenten: Aufgabe 6.8.1 b

Weitere Möglichkeiten komplexe Gleichungssysteme zu lösen, sind wie bei reellen Gleichungssystem, nur das anstatt mit reellen Zahlen komplexen Zahlen gerechnet werden muß:

- Cramer Regel
- Inverse Matrix
- Gauß'sche Algorithmus

6.8.4. Anwendung Ohmscher und Kirchhoffscher Gesetze

Wiederholung Theorie:

gegeben: Netzwerk mit k-Knoten und z-Zweigen.

gesucht: z komplexe Ströme und z komplexe Spannungen

Aufstellen des Gleichungssystems:

- Spannung in jeden Zweig ersetzen

$\underline{U}_i = \underline{Z}_i * \underline{I}_i$

- (k-1) komplexe Knotengleichungen auswerten

- m = z -(k-1) komplexe Maschengleichungen auswerten

Beispiel: Netzwerk 6.8A

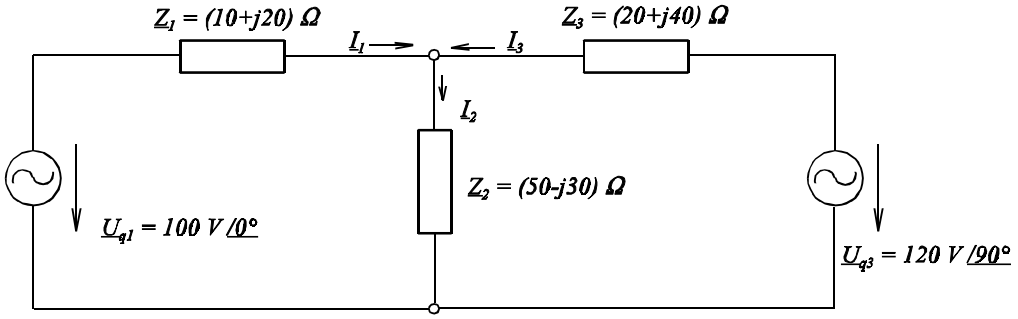


Bild EG684A

k = 2 z = 3 m = 3-(2-1) = 2

=> 1 Knotengleichung, 2 Maschengleichungen

$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$

$\underline{Z}_1 * \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 * \underline{I}_2 = \underline{U}_{q1}$

$\underline{Z}_3 * \underline{I}_3 + \underline{Z}_2 * \underline{I}_2 = \underline{U}_{q2}$

1	-1	1	$\underline{I}_1$		0	
$\underline{Z}_1$	$\underline{Z}_2$		$\underline{I}_2$	=	$\underline{U}_{q1}$	
	$\underline{Z}_2$	$\underline{Z}_3$	$\underline{I}_3$		$\underline{U}_{q2}$	

1	-1	1	$\underline{I}_1$		0	
(10+j20)Ω	(50-j30)Ω		$\underline{I}_2$	=	100 V	
	(50-j30)Ω	(20+j40)Ω	$\underline{I}_3$		j120 V	

Direkte Lösung mit Hilfe des HP48:

$\underline{I}_1 = 1.53\ A\angle -102.8^\circ$ $\underline{I}_2 = 1.31\ A\angle 47.4^\circ$ $\underline{I}_3 = 2.75\ A\angle 63.4^\circ$

Umformung auf ein reelles Gleichungssystem liefert nach Lösung das gleiche Ergebnis.

Studenten: Netzwerk 6.8c Gleichungssystem aufstellen

6.8.5. Komplexes Maschenstrom-Verfahren

Wiederholung aus Kap. 3.3 (erstes Semester) und komplexe Erweiterung

Schema:

gegeben: komplexes Netzwerk mit z-Zweigen und k-Knoten

A] m = z-k+1 komplexe Maschenströme eindeutig festlegen

B] komplexes Gleichungssystem m*m mit Maschenströmen $\underline{\bar{I}'}$ aufstellen:

$$\underline{\bar{Z}'} * \underline{\bar{I}'} = \underline{\bar{U}'_q}$$

C] **Hauptdiagonale:** Summe der komplexen Maschenwiderstände

D] **Nebendiagonale:** symmetrisch zur Hauptdiagonalen

Bei "i", "j" wird der komplexe Widerstand eingetragen, der von den Maschenströmen $\underline{I}_i'$ und $\underline{I}_j'$ durchflossen wird

\+ => $\underline{I}_i'$ und $\underline{I}_j'$ in gleicher Richtung
\- => $\underline{I}_i'$ und $\underline{I}_j'$ in verschiedenen Richtungen

E] Evtl. Stromquellen in Spannungsquellen umwandeln.

F] **Anregungsvektor:** Summe der komplexen Quellspannungen einer Masche eintragen
$+\underline{U}_{qi}$ wenn $\underline{U}_{qi}$ in Maschenrichtung Strom treibt
$-\underline{U}_{qi}$ wenn $\underline{U}_{qi}$ gegen Maschenrichtung Strom treibt

G1] Komplexes Gleichungssystem lösen.

G2] Umformen auf reelles Gleichungssystem. Nach Lösung wieder komplexe Variablen zusammenfügen.

H] Restliche Ströme und Spannungen berechnen

Beispiel: Netzwerk 6.8A

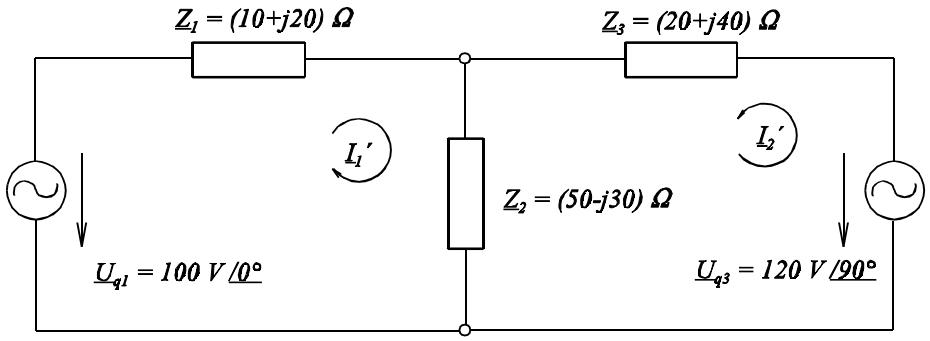


Bild EG685A

z = 3 k = 2 m = 3-(2-1) = 2 => $\underline{I}_1'$, $\underline{I}_2'$

$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$	$\underline{Z}_2$		$\underline{I}_1'$	=	$\underline{U}_{q1}$
$\underline{Z}_2$	$\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$		$\underline{I}_2'$		$\underline{U}_{q2}$

60 - j10	50 - j30	Ω	$\underline{I}_1'$	=	100	V
50 - j30	70 + j10		$\underline{I}_2'$		j120	

G1] Direkte Lösung mit HP48 liefert:

$\underline{I}_1' = 1.53\ A/\underline{-102.8^\circ}$ $\underline{I}_2' = 2.75\ A/\underline{63.4^\circ}$

G2] Umformen in ein reelles Gleichungssystem

60	50	10	30		$I_1'^{re}$		100
50	70	30	-10		$I_2'^{re}$		0
-10	-30	60	50	Ω	$I_1'^{im}$	=	0
-30	10	50	70		$I_1'^{im}$		120

V

Ergebnis: $I_1'^{re} = -0.339\,A$ $I_2'^{re} = 1.23\,A$ $I_1'^{im} = -1.49\,A$ $I_2'^{im} = 2.46\,A$

$\underline{I}_1' = -0.339\ A - j1.49\ A = 1.53\ A\ \underline{/-102.8^\circ}$

$\underline{I}_2' = 1.23\ A + j2.46\ A = 2.75\ A\ \underline{/63.4^\circ}$

$\underline{I}_1 = \underline{I}_1'$

$\underline{I}_2 = \underline{I}_1' + \underline{I}_2' = 0.89\ A + j0.97\ A$

$\underline{I}_3 = \underline{I}_2'$

fehlt noch: Spannungen über komplexe Widerstände berechnen.

Beispiel: Netzwerk 6.8b Gleichungssystem aufstellen

6.8.6. Komplexes Maschenstrom Verfahren für Rechner

Ableitung siehe 1. Semester Kap. 3.3.4, hier nur um komplex erweitert.

Schema:

gegeben: Komplexes Netzwerk mit z-Zweigen und k-Knoten

A] In einer z*z-Matrix die komplexen Widerstände der Zweige in die Diagonale eintragen, z.B. für n = 3

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 \end{pmatrix}$$

B] m = z-(k-1) komplexe Maschenströme eindeutig festlegen

C] Zweigrichtungen so festlegen, daß die Spannungsquellen der Zweige zu einem positiven Zweigstrom im Zweig beitragen.

D] Zweigströme als Funktion der Maschenströme berechnen und in die Matrix-Schreibweise umformen

$$\underline{\bar{I}} = \bar{C} * \underline{\bar{I}}'$$

$$\underline{\bar{I}} = \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \dots \\ \dots \\ \underline{I}_Z \end{pmatrix}$$ - komplexe Zweigströme

$$\underline{\bar{I}}' = \begin{pmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \\ \dots \\ \dots \\ \underline{I}'_m \end{pmatrix}$$ - komplexe Maschenströme

$\bar{C}$ - Zweig-Maschen-Inzidenz-Matrix $\quad dim(\bar{C}) = (z, m)$

E] Vektor der Zweigspannungen eintragen:

$$\underline{\bar{U}}_q = \begin{pmatrix} \underline{U}_{q1} \\ \underline{U}_{q2} \\ \dots \\ \dots \\ \underline{U}_{qZ} \end{pmatrix}$$

F] Lösung:
Damit sind die notwendigen Matrizen und Vektoren

$$\underline{\bar{Z}} \qquad \bar{C} \qquad \underline{\bar{U}}_q$$

bestimmt. Mit Hilfe der Matrizenrechnung können berechnet werden:

$\underline{\bar{I}}'$ - Maschenströme

$\underline{\bar{I}}$ - Zweigströme

$\underline{\bar{U}}$ - Zweigspannungen an den passiven Elementen $\underline{Z}$

Ableitung 1. Semester Kap. 3.3.4, hier nur Angabe und Erweiterung auf komplex:

$$\underline{\bar{I}}' = \left[\bar{C}_T * \underline{\bar{Z}} * \bar{C}\right]^{-1} * \bar{C}_T * \underline{\bar{U}}_q$$

$$\underline{\bar{I}} = \bar{C} * \underline{\bar{I}}' = \bar{C}\left[\bar{C}_T * \underline{\bar{Z}} * \bar{C}\right]^{-1} * \bar{C}_T * \underline{\bar{U}}_q$$

$$\underline{\bar{U}} = \underline{\bar{Z}} * \underline{\bar{I}} = \underline{\bar{Z}} * \bar{C}\left[\bar{C}_T * \underline{\bar{Z}} * \bar{C}\right]^{-1} * \bar{C}_T * \underline{\bar{U}}_q$$

Hinweis 1:

Das im letzten Abschnitt aufgestellte Gleichungssystem

$$\underline{\bar{I}}' = \underline{\bar{Z}}'^{-1} * \underline{\bar{U}}'_q$$

ist auch hier vorhanden mit

$$\underline{\bar{Z}}' = \bar{C}_T * \underline{\bar{Z}} * \bar{C} \qquad \underline{\bar{U}}'_q = \bar{C}_T * \underline{\bar{U}}_q$$

Hinweis 2:

Für Rechner ohne komplexe Matrizenrechnung muß eine Aufspaltung der Gleichungssysteme nach Kap. 6.8.3 vorgenommen werden, z.B.:

$$\begin{pmatrix} \bar{I}'_{re} \\ \bar{I}'_{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_T * \bar{Z}_{re} * \bar{C} & -\bar{C}_t * \bar{Z}_{im} * \bar{C} \\ \bar{C}_t * \bar{Z}_{im} * \bar{C} & \bar{C}_T * \bar{Z}_{re} * \bar{C} \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} \bar{C}_T * \bar{U}_q^{re} \\ \bar{C}_T * \bar{U}_q^{im} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Netzwerk 68B

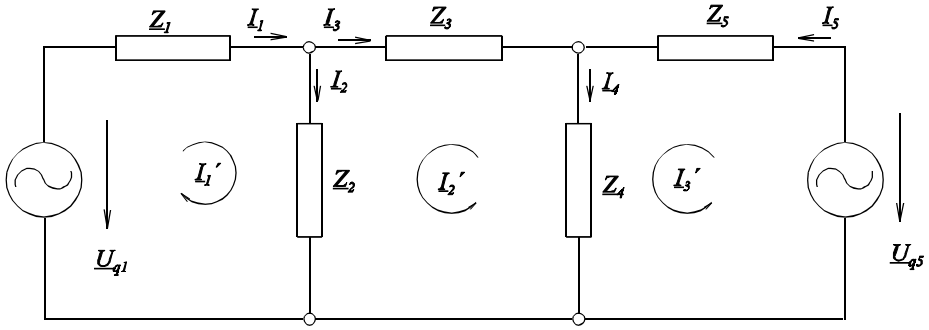


Bild EG686A

n = 5 k = 3 m = 5-(3-1) = 3 => $\underline{I}_1'$, $\underline{I}_2'$,$\underline{I}_3'$

$\underline{I}_1 = \underline{I}_1'$

$\underline{I}_2 = \underline{I}_1' + \underline{I}_2'$

$\underline{I}_3 = -\underline{I}_2'$

$\underline{I}_4 = -\underline{I}_2' + \underline{I}_3'$

$\underline{I}_5 = \underline{I}_3'$

$$\bar{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & -1 & \\ & -1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{I}_1' \\ \underline{I}_2' \\ \underline{I}_3' \end{bmatrix} = \bar{C} * \bar{\underline{I}}'$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & & & & \\ & \underline{Z}_2 & & & \\ & & \underline{Z}_3 & & \\ & & & \underline{Z}_4 & \\ & & & & \underline{Z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+j20 & & & & \\ & 5+j10 & & & \\ & & 70+j80 & & \\ & & & 2+j15 & \\ & & & & 8+j12 \end{bmatrix} \Omega$$

$$\underline{U}_q = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 150/\underline{30^\circ} \end{bmatrix} \text{ V}$$

Eingabe, $\bar{C}$, $\bar{\underline{Z}}$, $\bar{\underline{U}}_q$ in HP48, danach Berechnung mit Hilfe der Formel

$$\bar{\underline{I}} = \bar{C} * \bar{\underline{I}}' = \bar{C} \left[\bar{C}_T * \bar{\underline{Z}} * \bar{C} \right]^{-1} * \bar{C}_T * \bar{\underline{U}}_q$$

$\underline{I}_1 = 2.95$ A$/\underline{-66.5^\circ}$ $\underline{I}_2 = 3.07$ A$/\underline{-57.5^\circ}$ $\underline{I}_3 = 0.488$ A$/\underline{-165.6^\circ}$

$\underline{I}_4 = 5.03$ A$/\underline{-41.5^\circ}$ $\underline{I}_5 = 5.31$ A$/\underline{-37.1^\circ}$

Kommentar: schnellste Methode mit HP48

6.8.7. Dreieck-Stern und Stern-Dreieck-Umwandlung

Die beiden Umwandlungsformen wurden im 1. Semester, Kap. 3.4.3, für ohmsche Widerstände hergeleitet. Tauscht man R gegen $\underline{Z}$ aus ergibt sich:

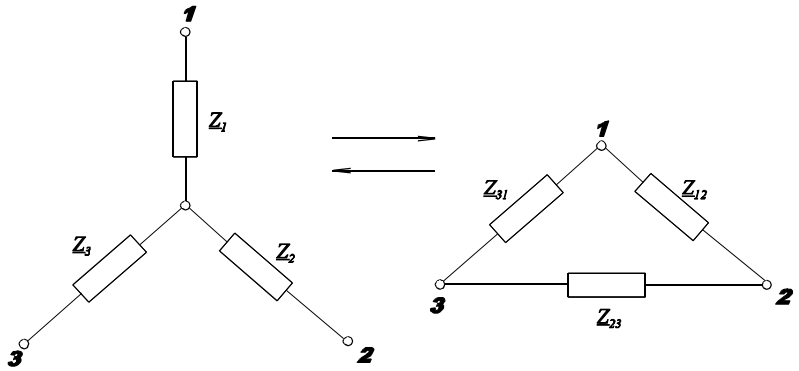


Bild EG687A

$$\begin{pmatrix}\underline{Z}_1\\ \underline{Z}_2\\ \underline{Z}_3\end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}}\begin{pmatrix}\underline{Z}_{12}*\underline{Z}_{31}\\ \underline{Z}_{12}*\underline{Z}_{23}\\ \underline{Z}_{23}*\underline{Z}_{31}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\underline{Z}_{12}\\ \underline{Z}_{23}\\ \underline{Z}_{31}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\dfrac{\underline{Z}_1*\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\\ \underline{Z}_2+\underline{Z}_3+\dfrac{\underline{Z}_2*\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}\\ \underline{Z}_3+\underline{Z}_1+\dfrac{\underline{Z}_3*\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\end{pmatrix}$$

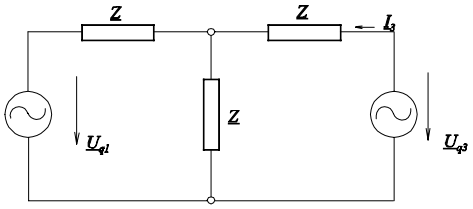
Der Stern-Widerstand ergibt sich aus der Multiplikation beider, der Klemmen anliegender Dreieck-Widerstände, dividiert durch die Summe der Dreieck-Widerstände.

Die Dreieck-Widerstände ergeben aus der Summe der beiden Klemmen anliegender Stern-Widerstände plus dessen Produkt dividiert durch den gegenüberliegenden Stern-Widerstand.

Für drei gleiche Widerstände ergibt sich

$$\underline{Z}_\lambda = \frac{1}{3}\underline{Z}_\Delta$$

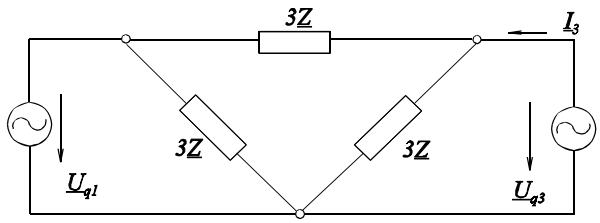
Beispiel:



Der Strom $\underline{I}_3$ ist zu bestimmen.

Bild EG687B

Umformung



Aus dem oberen Bild ergibt sich direkt:

Bild EG687C

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{q3}}{3\underline{Z}} + \frac{\underline{U}_{q3}-\underline{U}_{q1}}{3\underline{Z}} = \frac{2\underline{U}_{q3}-\underline{U}_{q1}}{3\underline{Z}}$$

6.8.8. Quellen-Umwandlung

Nach Kap. 2.7.3 (1. Semester) konnte eine Spannungsquelle in eine äquivalente Stromquelle mit gleichen Verhalten an den Klemmen umgewandelt werden und umgekehrt. Erweiterung der reellen Größen auf komplexe ergibt:

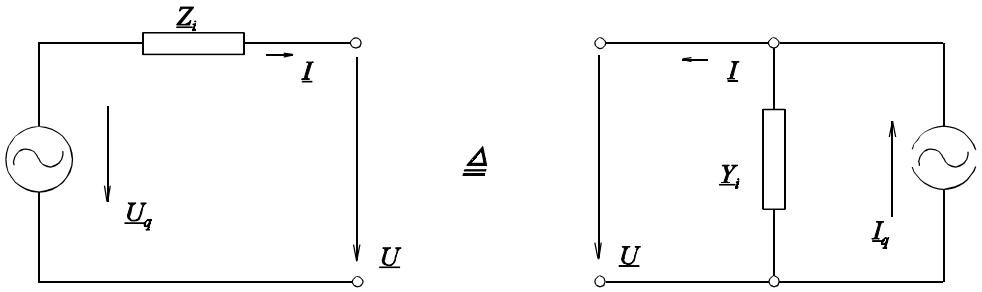


Bild EG688A

$$\underline{I}_q = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_i} \qquad \underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i}$$

Beispiel: Netzwerk 68A Spannung $\underline{U}_2$

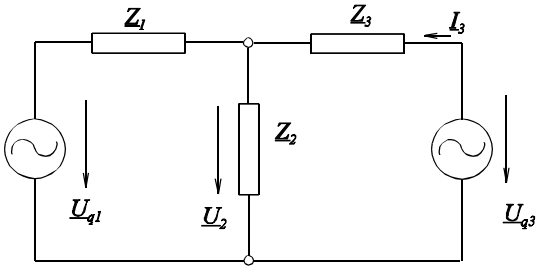


Bild EG688B

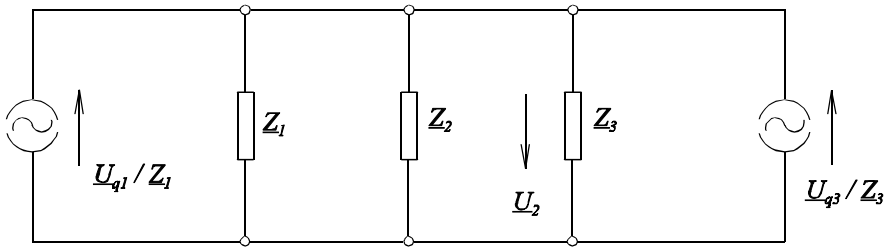
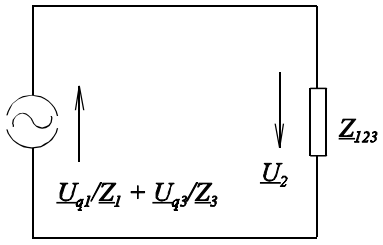


Bild EG688C



$$\underline{Z}_{123} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{123}\left(\frac{\underline{U}_{q1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{q3}}{\underline{Z}_3}\right)$$

Bild EG688D

Die folgenden Variablen werden in HP48 eingegeben und unter Namen abgespeichert:

$\underline{Z}_1 = (10 + j20)\Omega$ $\underline{Z}_2 = (50 - j30)\Omega$ $\underline{Z}_3 = (20 + j40)\Omega$

$\underline{U}_{q1} = 100$ V $\underline{U}_{q3} = j120$ V

$\underline{Z}_{123}$ wird berechnet und auch unter Namen abgespeichert: $\underline{Z}_{123} = 14.72\ \Omega\ \underline{/48.86^\circ}$

Die Spannung $\underline{U}_2$ wird danach mit obiger Formel berechnet: $U_2 = 76.7\ \text{V}\underline{/16.39^\circ}$

6.8.9. Überlagerungsprinzip

Wiederholung Überlagerungsprinzip (Kap.3.5, 1. Semester) und auf komplexe Größen erweitert:

gegeben: Lineares Netz mit $\underline{U}_i = \underline{Z}_i * \underline{I}_i$ und n-Spannungsquellen

Schema:

A] Die Auswirkungen von n Quellen einzeln untersuchen. Dazu:
- alle anderen Spannungsquellen kurzschließen
- alle anderen Stromquellen öffnen

B] Alle Anteile in den Zweigen von Strom und Spannung n mal überlagern (addieren)

Beispiel:

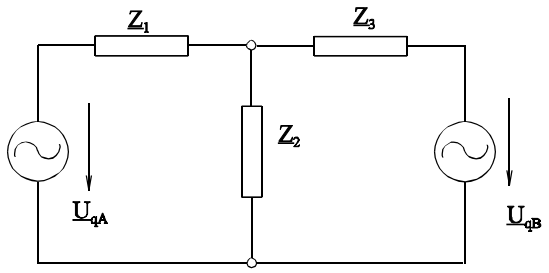


Bild EG689A

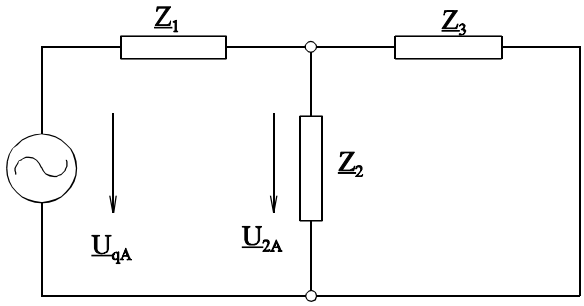
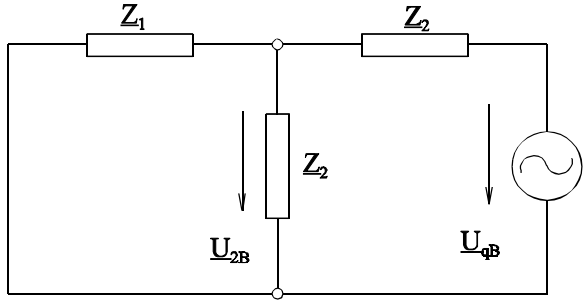


Bild EG689B

$$\underline{U}_{2A} = \underline{U}_{qA} * \frac{\frac{\underline{Z}_2 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}} = \frac{\underline{Z}_2 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 * \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 * \underline{Z}_1} * U_{qA}$$



$$\underline{U}_{2B} = \underline{U}_{qB} \frac{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 * \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 * \underline{Z}_1}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{2A} + \underline{U}_{2B} = \frac{\underline{U}_{qA} * \underline{Z}_2 * \underline{Z}_3 + \underline{U}_{qB} * \underline{Z}_1 * \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 * \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 * \underline{Z}_1}$$

Bild EG689C

6.8.10. Ersatzquellen

Wenn nur Strom und Spannung an einem komplexen Widerstand im Netz von Interesse sind, kann das Restnetzwerk zu einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand umgeformt werden.

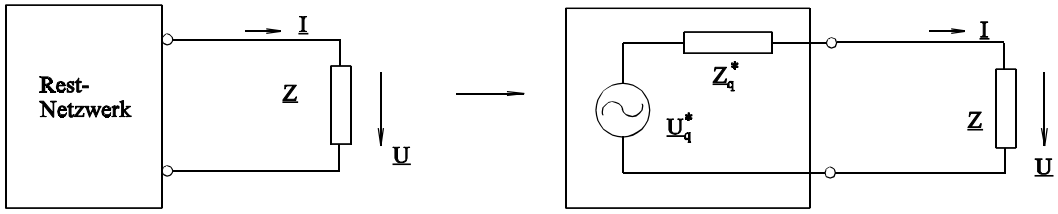


Bild EG6810A

Nach Bild EG6810A können Strom und Spannung am Widerstand $\underline{Z}$ bestimmt werden:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q^*}{\underline{Z}_q^* + \underline{Z}} \qquad \underline{U} = \underline{U}_q^* \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}_q^*}$$

Die Elemente $\underline{U}_q^*$ und $\underline{Z}^*$ sind noch zu bestimmen. Aus Kap. 3.6 (1. Semester) mit Erweiterung auf komplexe Rechnung, ergibt sich:

Es müssen von den drei Werten

$\underline{I}_q^*$ - Kurzschlußstrom an den Klemmen von $\underline{Z}$

$\underline{U}_q^*$ - Leerlaufspannung an den Klemmen von $\underline{Z}$ ($\underline{Z}$ abklemmen)

$\underline{Z}_q^*$ - Innenwiderstand an den Klemmen von $\underline{Z}$

zwei bestimmt werden. Der dritte Wert ist mit Hilfe der Formel

$$\underline{U}_q^* = \underline{Z}_q^* * \underline{I}_q^*$$

zu berechnen. Der komplexe Innenwiderstand wird bestimmt, indem man in die Klemmen des Restnetzwerkes hinein sieht. Ideale Spannungsquellen werden dabei kurzgeschlossen und ideale Stromquellen geöffnet.

Beispiel: Netzwerk 68A Strom $\underline{I}_2$

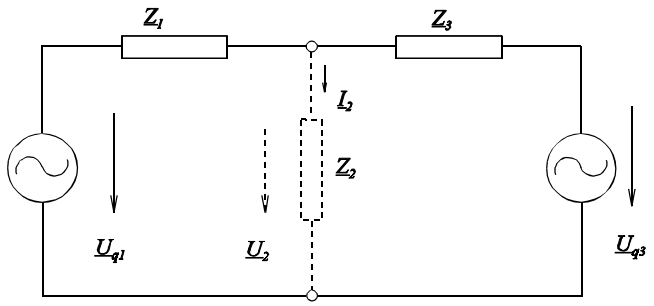


Bild EG6810B

A] Kurzschlußstrom an den Klemmen von $\underline{Z}_2$:

$$\underline{I}_q^* = \frac{\underline{U}_{q1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{q3}}{\underline{Z}_3}$$

B] Innenwiderstand an den Klemmen von $\underline{Z}_2$:

$$\underline{Z}_q^* = \underline{Z}_1 \parallel \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}$$

C] Umrechnung:

$$\underline{U}_q^* = \underline{I}_q^* * \underline{Z}_q^* = \left(\frac{\underline{U}_{q1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{q3}}{\underline{Z}_3} \right) * \frac{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_{q1} * \underline{Z}_3 + \underline{U}_{q3} * \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}$$

D] Formel zur Stromberechnung

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_q^*}{\underline{Z}_q^* + \underline{Z}_2} = \frac{\dfrac{\underline{U}_{q1} * \underline{Z}_3 + \underline{U}_{q3} * \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}}{\dfrac{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_{q1} * \underline{Z}_3 + \underline{U}_{q3} * \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 * \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 * \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

E] Die Größen

$\underline{U}_{q1}$ $\underline{U}_{q2}$, $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$

werden mit Namen im HP48 gespeichert. Die Berechnung mit Hilfe der Formel unter D ergibt:

$\underline{I}_2 = 1.32\ \text{A} \angle 47.35^\circ$

Alternative Berechnung:

$\underline{U}_{q1}$ $\underline{U}_{q2}$, $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ → HP48 unter Namen

$\underline{Z}_q^*$ nach B → HP48 unter Namen

$\underline{U}_q^*$ nach C → HP48 unter Namen

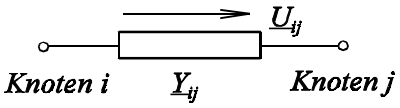
$\underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}_q^*}{\underline{Z}_q^* + \underline{Z}_C}$ berechnen unter Aufruf der HP48 Namen

6.8.11. Komplexes Knotenpunkt-Potential-Verfahren

Wiederholung aus Kap.3.7 (1. Semester) und komplexe Erweiterung.

Prinzip: Jedem Knoten wird ein komplexes Potential $\underline{\varphi}$ zugeordnet.

Die Spannung an dem Zweig zwischen den Knoten i und j ergibt sich aus der Differenz der Potentiale



$$\underline{U}_{ij} = \underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_j$$

gegeben: Netzwerk mit k-Knoten

Schema:

A] Einem Knoten, dem Knoten "0", wird willkürlich das Potential $\underline{\varphi}_0 = 0$ zugeordnet.

B] Die anderen Knoten bekommen das Potential $\underline{\varphi}_1$ bis $\underline{\varphi}_{k-1}$

C] Spannungsquellen in Stromquellen umwandeln.

D] Komplexe Widerstände in komplexe Leitwerte umwandeln.

E] Komplexes Gleichungssystem für die Potential $\underline{\varphi}_1$ bis $\underline{\varphi}_{K-1}$ aufstellen.

$$\overline{\underline{Y}'} * \overline{\underline{\varphi}} = \overline{\underline{I}'_q}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{q1}' \\ \underline{I}_{q2}' \\ \underline{I}_{q3}' \end{bmatrix} \quad \text{für k-1 = 3}$$

F] **Hauptdiagonale:** Alle vom Knoten abgehenden Leitwerte positiv aufsummieren.

G] **Koppelelemente:** Die Leitwerte $\underline{Y}_{ij}$ zwischen den Knoten i und j an der Stelle $\underline{Y}(i,j)$ und $\underline{Y}(j,i)$ negativ eintragen, die Matrix $\overline{\underline{Y}'}$ ist symmetrisch.

H] **Vektor $\overline{\underline{I}'_q}$, Element $\underline{I}_q'[j]$**

Alle den Knoten j verbundenen Stromquellen vorzeichenrichtig aufsummieren

+ bei reinfließenden Strom
- bei rausfließenden Strom

I] **Komplexes Gleichungssystem lösen:**

I1] in reelles Gleichungssystem überführen, lösen, komplexen Lösungsvektor wieder zum komplexen Lösungsvektor zusammensetzen.
I2] Komplexes Gleichungssystem direkt lösen.

K] Spannungen berechnen $\underline{U}_{ij} = \underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_j$

L] Ströme berechnen $\underline{I}_{ij} = \underline{U}_{ij} * \underline{Y}_{ij}$

Beispiel: Netzwerk 68C

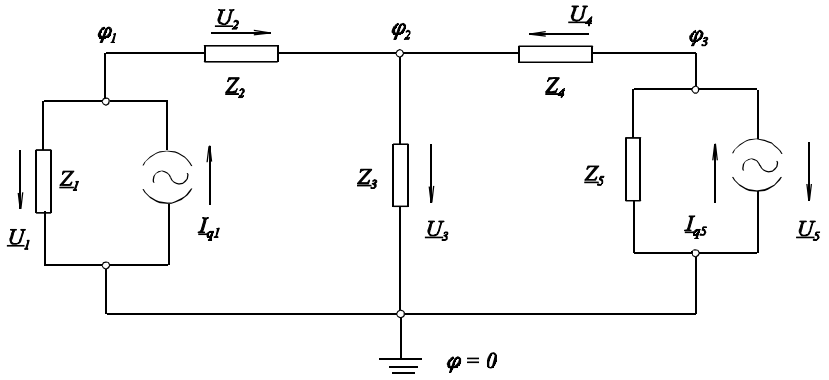


Bild EG6811A

$\underline{I}_{q1} = 10\ A\ \angle 0°$ $\quad \underline{Z}_1 = (10 + j10)\ \Omega \Rightarrow \underline{Y}_1 = (0.05 - j0.05)s$

$\underline{I}_{q5} = 5\ A\ \angle -60°$ $\quad \underline{Z}_2 = (2 + j4)\ \Omega \Rightarrow \underline{Y}_2 = (0.1 - j0.2)s$

$\underline{Z}_3 = (60 + j80)\ \Omega \Rightarrow \underline{Y}_3 = (0.006 - j0.008)s$

$\underline{Z}_4 = (3 - j6)\ \Omega \Rightarrow \underline{Y}_4 = (0.06667 + j0.1333)s$

$\underline{Z}_5 = (10 + j17.32)\ \Omega \Rightarrow \underline{Y}_5 = (0.025 - j0.0433)s$

k = 4 => Variable $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \underline{\varphi}_3$

	1	2	3			
1	$\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$	$-\underline{Y}_2$	0	$\underline{\varphi}_1$	=	$\underline{I}_{q1}$
2	$-\underline{Y}_2$	$\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4$	$-\underline{Y}_4$	$\underline{\varphi}_2$		0
3	0	$-\underline{Y}_4$	$\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5$	$\underline{\varphi}_3$		$\underline{I}_{q5}$

0.15 - j0.25	-0.1 + j0.2	0		$\underline{\varphi}_1$		$10\angle 0°$
-0.1 + j0.2	0.17267 - j0.07467	-0.06667 - j0.1333	S	$\underline{\varphi}_2$	=	0 A
0	-0.06667 - j0.1333	0.09167 + j0.09003		$\underline{\varphi}_3$		$5\angle -60°$

Direkte Lösung mit HP48 ergibt:

$\underline{\varphi}_1 = 109.7\ V\angle 32.28°$ $\quad \underline{\varphi}_2 = 105.1\ V\angle 25.63°$ $\quad \underline{\varphi}_3 = 90.77\ V\angle 31.84°$

Die Spannungen ergeben sich aus den Potentialdifferenzen

$\underline{U}_1 = \underline{\varphi}_1 = 109.7\ V\angle 32.28°$

$\underline{U}_2 = \underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_2 = 13.29\ V\angle 98.54°$

$\underline{U}_3 = \underline{\varphi}_2 = 105.1\ V\angle 25.63°$

$\underline{U}_4 = \underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_2 = 17.82\ V\angle 172.2°$

$\underline{U}_5 = \underline{\varphi}_3 = 90.77\ V\angle 31.84°$

Falls kein Rechner mit komplexer Matrizenrechnung zur Verfügung steht, muß das Gleichungssystem nach Kap.

6.8.3 aufgespalten werden:

0.15	-0.1	0	0.25	-0.2	0		φ_1^{re}		10
-0.1	0.17267	-0.06667	-0.2	0.07467	0.1333		φ_2^{re}		0
0	-0.06667	0.09176	0	0.1333	-0.09003		φ_3^{re}		2.5
-0.25	0.2	0	0.15	-0.1	0	S*	φ_1^{im}	=	0
0.2	-0.07467	-0.1333	-0.1	0.17267	-0.06667		φ_2^{im}		0
0	-0.1333	0.09003	0	-0.06667	0.09176		φ_3^{im}		-4.330

A

6.8.12. Komplexes Knotenpunkt-Potential-Verfahren für Rechner

Ableitung siehe Kap.3.7.4 (1. Semester), hier nur um komplex erweitert.

gegeben: Netzwerk mit k-Knoten und z-Zweigen

Schema:

A] Einem Knoten, dem Knoten "0", wird willkürlich das komplexe Potential $\underline{\varphi}_0 = 0$ zugeordnet.

B] Die anderen Knoten bekommen das komplexe Potential $\underline{\varphi}_1$ bis $\underline{\varphi}_{K-1}$.

C] Netzwerk umwandeln, daß nur komplexe Stromquellen und komplexe Leitwerte vorhanden sind.

D] Den Spannungen in den Zweigen eine Richtung zuordnen. Die Zweige mit Quellen bekommen die Zweigrichtung entgegengesetzt zur Quelle. (Quellstrom muß positiven Anteil am Zweigspannung bewirken.)

E] Spannungen an den Leitwerten durch Potentiale ausdrücken.

$$\underline{U}_{ij} = \underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_j$$

und in Matrixform umschreiben $\quad \underline{\bar{U}} = \bar{K}^T * \underline{\bar{\varphi}}$

mit $\quad \underline{\bar{U}} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \dots \\ \dots \\ \underline{U}_Z \end{pmatrix} \qquad \underline{\bar{\varphi}} = \begin{pmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \dots \\ \dots \\ \underline{\varphi}_{k-1} \end{pmatrix} \qquad dim(\bar{K}^T) = (z, k-1)$

F] Quellenvektor $\underline{\bar{I}}_q$ aufstellen: Die komplexen Stromquellen in den Zweigen in einen Vektor.

$$\underline{\bar{I}}_q = \begin{pmatrix} +\underline{I}_{q1} \\ +\underline{I}_{q2} \\ \dots \\ \dots \\ +\underline{I}_{qZ} \end{pmatrix}$$

G] Leitwertmatrix $\underline{\bar{Y}}$ aufstellen. Die Zweigleitwerte werden in der Diagonalen eintragen

$$dim(\underline{\bar{Y}}) = (\underline{z}, \underline{z}) \quad \underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i} \qquad \underline{\bar{Y}} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

$\underline{\bar{Y}} =$

$\underline{Y}_1$				
	$\underline{Y}_2$			
		...		
			...	
				$\underline{Y}_Z$

H] **Lösen:**
Damit sind die notwendigen Matrizen und Vektoren

$$\underline{\bar{Y}},\ \bar{K} \text{ und } \underline{\bar{I}}_q$$

bestimmt. Mit Hilfe der Matrizenrechnung können berechnet werden:

$\underline{\bar{\varphi}}$ - Knotenpunktpotential

$\underline{\bar{U}}$ - Zweigspannungen

$\underline{\bar{I}}$ - Zweigströme

Ableitung Kap. 3.7.4 (1. Semester) hier nur Angabe und Erweiterung auf komplexe Größen

$\underline{\bar{\varphi}}' = \left[\bar{K} * \underline{\bar{Y}} * \bar{K}_T\right]^{-1} * \bar{K} * \underline{\bar{I}}_q$
$\underline{\bar{U}} = \bar{K}_T * \underline{\bar{\varphi}} = \bar{K}_T \left[\bar{K} * \underline{\bar{Y}} * \bar{K}_T\right]^{-1} * \bar{K} * \underline{\bar{I}}_q$
$\underline{\bar{I}} = \underline{\bar{Y}} * \underline{\bar{U}} = \underline{\bar{Y}} * \bar{K}_T \left[\bar{K} * \underline{\bar{Y}} * \bar{K}_T\right]^{-1} * \bar{K} * \underline{\bar{I}}_q$

Anmerkung 1: Das im letzten Kapitel aufgestellte Gleichungssystem ist auch hier vorhanden mit:

$$\underline{\bar{Y}}' = \bar{K} * \underline{\bar{Y}} * \bar{K}_T \qquad \underline{\bar{I}}'_q = \bar{K} * \underline{\bar{I}}_q \qquad \underline{\bar{Y}}' * \underline{\bar{\varphi}} = \underline{\bar{I}}'_q$$

Anmerkung 2: Obere Größen sind für das umgeformte Netzwerk berechnet. Für evtl. vorhandene Spannungsquellen muß mit den Ergebnissen eines Zweigs eine Umformung vorgenommen werden.

Anmerkung 3: Für Rechner ohne komplexe Matrizenrechnung muß eine Aufspaltung des Gleichungssystems nach Kap. 6.8.3. vorgenommen werden, z.B.:

$$\begin{pmatrix} \underline{\bar{\varphi}}_{re} \\ \underline{\bar{\varphi}}_{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{K} * \bar{Y}_{re} * \bar{K}_T & -\bar{K} * \bar{Y}_{im} * \bar{K}_T \\ \bar{K} * \bar{Y}_{im} * \bar{K}_T & \bar{K} * \bar{Y}_{re} * \bar{K}_T \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} \bar{K} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{K} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \bar{I}_q^{re} \\ \bar{I}_q^{im} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\bar{\varphi}}_{re} \\ \underline{\bar{\varphi}}_{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{K} * \bar{Y}_{re} * \bar{K}_T & -\bar{K} * \bar{Y}_{im} * \bar{K}_T \\ \bar{K} * \bar{Y}_{im} * \bar{K}_T & \bar{K} * \bar{Y}_{re} * \bar{K}_T \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} \bar{K} * \bar{I}_q^{re} \\ \bar{K} * \bar{I}_q^{im} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Netzwerk 68C

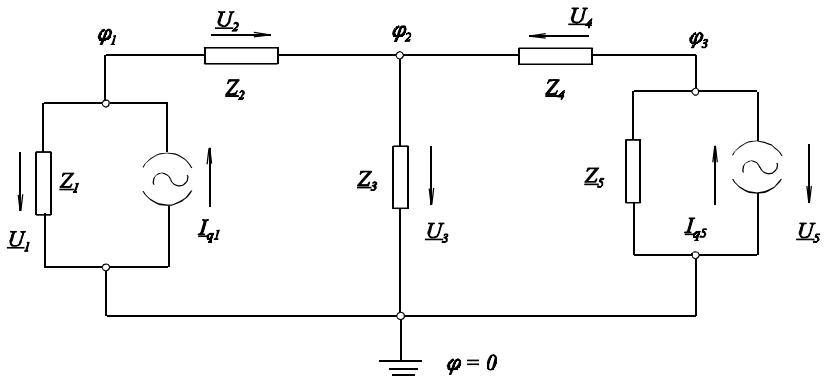


Bild EG6811A

$\underline{I}_{q1} = 10\ A\ \angle 0°$ $\underline{I}_{q5} = 5\ A\ \angle -60°$

$\underline{Z}_1 = (10 + j10)\ \Omega$ => $\underline{Y}_1 = (0.05 - j0.05)S$

$\underline{Z}_2 = (2 + j4)\ \Omega$ => $\underline{Y}_2 = (0.1 - j0.2)S$

$\underline{Z}_3 = (60 + j80)\ \Omega$ => $\underline{Y}_3 = (0.006 - j0.008)S$

$\underline{Z}_4 = (3 - j6)\ \Omega$ => $\underline{Y}_4 = (0.06667 - j0.1333)S$

$\underline{Z}_5 = (10 + j17.32)\ \Omega$ => $\underline{Y}_5 = (0.025 - j0.0433)S$

k - 1 = 3 z = 5

$$\underline{\bar{Y}} = \begin{pmatrix} 0.05 - j0.05 & & & & \\ & 0.1 - j0.2 & & & \\ & & 0.006 - j0.008 & & \\ & & & 0.06667 + j0.1333 & \\ & & & & 0.025 - j0.0433 \end{pmatrix} S$$

$$\underline{\bar{I}}_q = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.5 - j4.330 \end{pmatrix} A$$

$\underline{U}_1 = \underline{\varphi}_1$

$\underline{U}_2 = \underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_2$

$\underline{U}_3 = \underline{\varphi}_2$

$\underline{U}_4 = \underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_2$

$\underline{U}_5 = \underline{\varphi}_3$

$$\underline{\bar{U}} = \bar{K}_T * \underline{\bar{\varphi}}$$

$$\bar{K}_T =$$

1		
1	-1	
	1	
	-1	1
		1

Eingabe $\bar{K}_T$, $\underline{\bar{Y}}$, $\underline{\bar{I}}_q$ in HP48, danach Berechnung nach Formeln ($\bar{K}$ auch berechnen)

$$\underline{\bar{\varphi}}' = \left[\bar{K} * \underline{\bar{Y}} * \bar{K}_T\right]^{-1} * \bar{K} * \underline{\bar{I}}_q$$

$$\underline{\bar{U}} = \bar{K}_T * \underline{\bar{\varphi}} = \bar{K}_T \left[\bar{K} * \underline{\bar{Y}} * \bar{K}_T\right]^{-1} * \bar{K} * \underline{\bar{I}}_q$$

$$\underline{\bar{I}} = \underline{\bar{Y}} * \underline{\bar{U}} = \underline{\bar{Y}} * \bar{K}_T \left[\bar{K} * \underline{\bar{Y}} * \bar{K}_T\right]^{-1} * \bar{K} * \underline{\bar{I}}_q$$

ergibt

$\underline{U}_1 = 110\ \text{V}\angle 32.3^\circ$

$\underline{U}_2 = 13.3\ \text{V}\angle 98.54^\circ$

$\underline{U}_3 = 105\ \text{V}\angle 25.6^\circ$

$\underline{U}_4 = 17.8\ \text{V}\angle 172^\circ$

$\underline{U}_5 = 90.7\ \text{V}\angle 31.9^\circ$

6.9. Drehstrom

Warum und wozu wird Drehstrom verwendet?

- Übertrag hoher Leistungen
- über 99 % aller elektrischer Energie wird als Drehstrom erzeugt.
- Bessere Auswertung der Geräte
- Einphasen Wechselstrom bedingt zeitliche Wirkleistungspendelung mit 2f = 100 Hz. Bei Drehstrom ist die Summenwirkleistung konstant.
- Die Erzeugung von Drehstrom wird in Abschnitt 6.10 erläutert.

6.9.1. Mehrphasen-Wechselströme

Bislang wurden meist Netze mit einer Spannungsquellen betrachtet, die Spannung der Quelle wurde meist in die reelle Achse gelegt, siehe Bild EG691A.

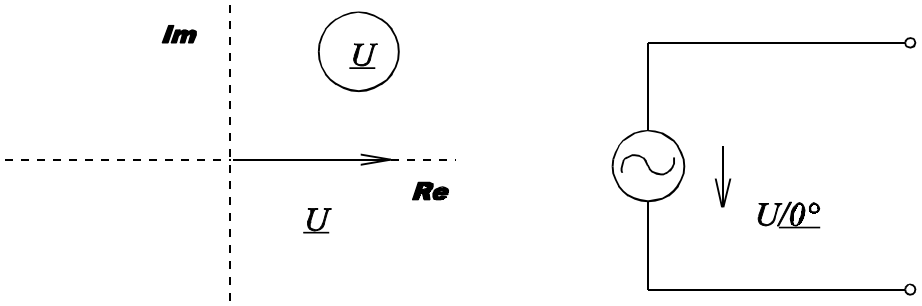


Bild EG691A: Einphasen-Wechselstrom

Bei Mehrphasen-Wechselströme sind m Spannungsquellen gleicher Amplitude vorhanden, deren Phasen um jeweils 360°/m verschoben sind. Bild EG691B zeigt ein Beispiel für m = 6. Die Phasen sind dabei jeweils um 360°/m = 60° verschoben

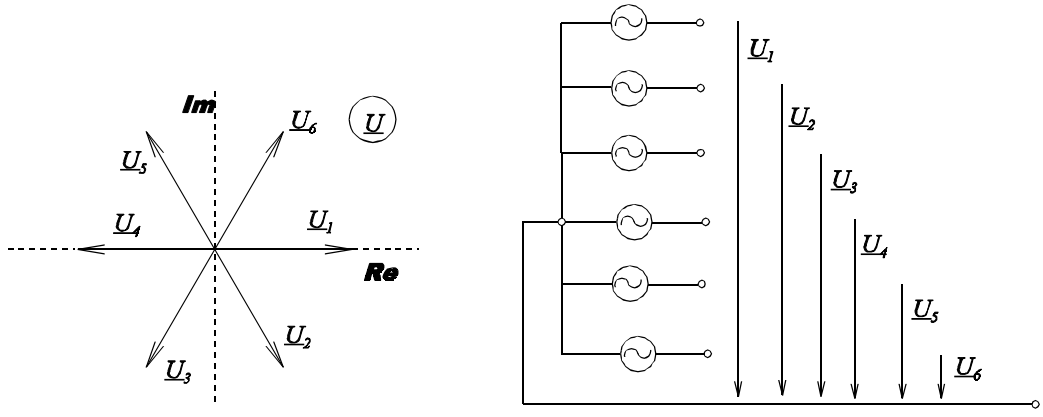


Bild EG691B: Sechsphasen-Wechselstrom

Großtechnische Anwendung findet in der Energieverteilung

m = 3 => Dreiphasen-Wechselstrom = Drehstrom

Dabei gibt es verschiedene Schaltungsarten von Quelle und Verbraucher.

6.9.2. Schaltungen der Quelle

Im allgemeinen sind drei symmetrische Wechselspannungsquellen vorhanden, um jeweils 120° phasenverschoben, siehe Bild EG692A.

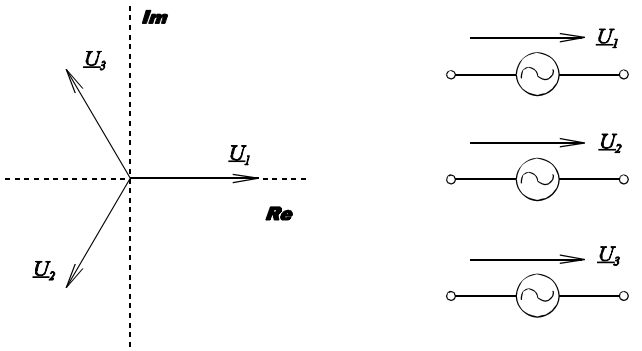


Bild EG692A

Drei Spannungsquellen würden normalerweise sechs Leitungen bedingen. In Energieversorgungsnetzen sind aber nur drei oder vier Leitungen üblich. Dazu gibt es zwei Schaltungsvarianten der Quellen, die in den nächsten Unterabschnitten erläutert werden.

6.9.2.1. Sternschaltung (Zusammenfassung auf Arbeitsblatt EGII-21)

Dazu werden die Quellen sternförmig nach Bild EG6921A zusammengeschaltet.

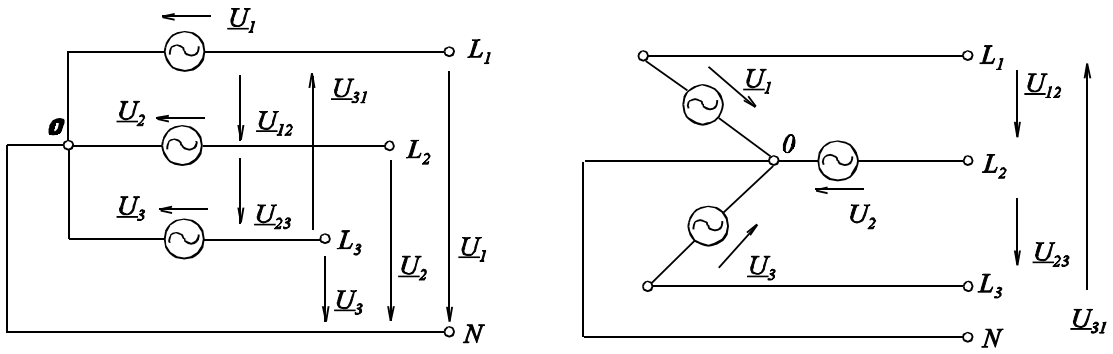
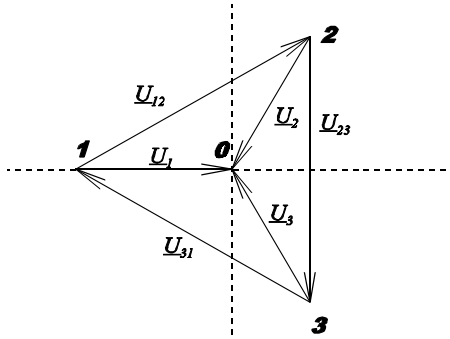


Bild EG6921A: Sternschaltung der Quellen (0 = Sternpunkt)

Nach Bild EG6921A ergeben sich die sechs Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$, $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$ und $\underline{U}_{31}$. Die Spannungen lassen sich unterteilen in

$\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$	-	Sternpunktspannungen
$\underline{U}_{21}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$	-	Leiter-Leiter-Spannungen, verkettete Spannungen, Leiter-Spannungen

Den Zeitverlauf bestimmt man an besten mit Hilfe der komplexen Rechnung. Die Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ und $\underline{U}_3$ sind um jeweils 120° phasenverschoben U_2 eilt U_1 um 120° nach und U_3 eilt U_2 nach. Die Spannung U_1 kann die reelle Achse gelegt werden, siehe Bild EG6921B.



$$\underline{U}_1 = U_{str}\,\underline{/0^\circ} = U_{str}$$

$$\underline{U}_2 = U_{str}\underline{/-120^\circ} = U_{str}\left(-0.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\underline{U}_3 = U_{str}\underline{/-240^\circ} = U_{str}\left(-0.5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Bild EG6921B

Die verketteten Leiterspannungen ergeben sich als Differenzspannungen sowohl nach Bild EG6921A als auch nach Bild EG69251B:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = U_{str}\left[e^{j0^\circ} - e^{-j120^\circ}\right] = \sqrt{3}\ U_{str}\,\underline{/30^\circ}$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 = U_{str}\left[e^{-j120^\circ} - e^{-j240^\circ}\right] = \sqrt{3}\ U_{str}\,\underline{/-90^\circ}$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1 = U_{str}\left[e^{-j240^\circ} - e^{j0^\circ}\right] = \sqrt{3}\ U_{str}\,\underline{/-210^\circ}$$

Damit ergibt sich zwischen Strang- und Leiterspannungen der Faktor $\sqrt{3}$ bei der Stern-Schaltung:

$$U_{Leiter} = \sqrt{3} * U_{str}$$

$$400\ V = \sqrt{3} * 230.9\ V \qquad \text{Früher: } \frac{380\ V}{\sqrt{3}} = 220\ V$$

Mit den komplexen Zeigern läßt sich der Verlauf der Spannungen zeichnerisch darstellen, siehe Arbeitsblatt EGII-21.

Konstruktionstips für den Fall, daß die Spannungen noch nicht gekennzeichnet sind:

- U_1 kennzeichnen
- U_2 120° später U_1
- U_3 120° später U_2
- $u_{12}(t) = 0$ wenn $U_1 = U_2$
 $u_{12}(t) > 0$ wenn $U_1 > U_2$
- $u_{23}(t) = 0$ wenn $U_2 = U_3$
 $u_{23}(t) > 0$ wenn $U_2 > U_3$ oder u_{23} 120° später u_{12}
- $u_{31}(t) = 0$ wenn $U_3 = U_1$
 $u_{31}(t) > 0$ wenn $U_3 > U_1$ oder u_{31} 120° später u_{23}

Bei Drehstromnetzen gibt es entweder Drei- oder Vierleiternetze. Der Unterschied wird später bei den Verbraucher-Schaltungen noch behandelt.

Die Netzspannung wird immer als Leiterspannung angegeben.

Eine andere Möglichkeit, die Spannungen zu beschreiben und zu konstruieren:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1\underline{/0^\circ} = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/0^\circ} \qquad \underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = \sqrt{3}\ U_1 * \underline{/30^\circ} = U\underline{/30^\circ}$$

$$\underline{U}_2 = U_1 * e^{-120^\circ} = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/-120^\circ} \qquad \underline{U}_{23} = \underline{U}_{12} * e^{-j120^\circ} = U\underline{/-90^\circ}$$

$$\underline{U}_3 = U_1 * e^{-240^\circ} = \frac{U}{\sqrt{3}}\underline{/-240^\circ} \qquad \underline{U}_{31} = \underline{U}_{12} * e^{-j240^\circ} = U\underline{/-210^\circ}$$

Arbeitsblatt EGII-21 Sternschaltung Quelle

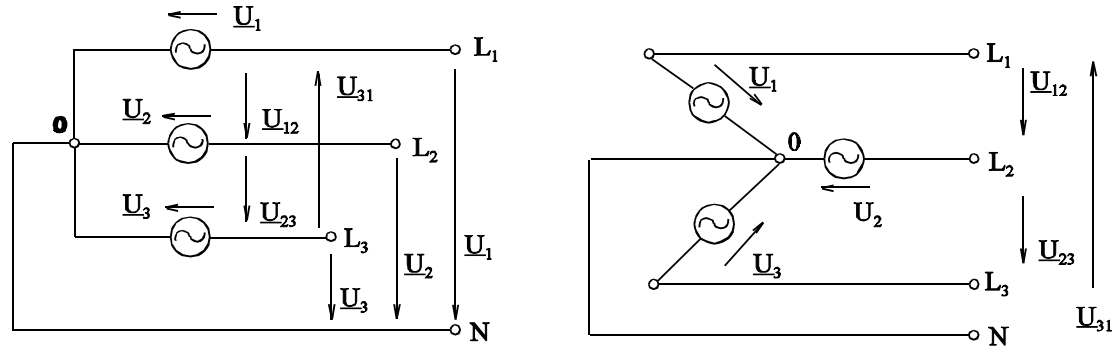
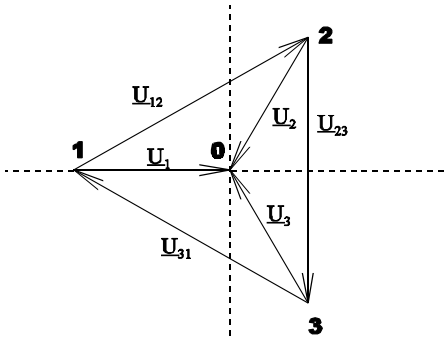


Bild EG6921A: Sternschaltung der Quellen 0 = Sternpunkt



$$\underline{U}_1 = U_{str}\,\underline{/0^\circ} = U_{str}$$

$$\underline{U}_2 = U_{str}\underline{/-120^\circ} = U_{str}\left(-0.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\underline{U}_3 = U_{str}\underline{/-240^\circ} = U_{str}\left(-0.5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Bild EG6921B

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = U_{str}\left[e^{j0^\circ} - e^{-j120^\circ}\right] = \sqrt{3}\,U_{str}\,\underline{/30^\circ}$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 = U_{str}\left[e^{-j120^\circ} - e^{-j240^\circ}\right] = \sqrt{3}\,U_{str}\,\underline{/-90^\circ}$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1 = U_{str}\left[e^{-j240^\circ} - e^{j0^\circ}\right] = \sqrt{3}\,U_{str}\,\underline{/-210^\circ}$$

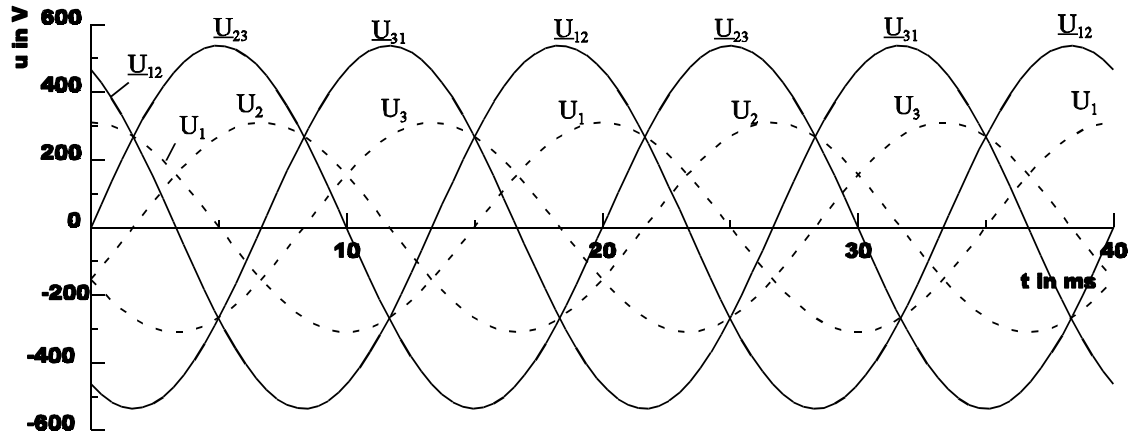


Bild EG6921C: Verlauf von Leiter- und Strangspannungen U_{Leiter} = 400 V, f = 50 Hz

6.9.2.2. Dreieckschaltung

Dazu werden die Quellen dreieckförmig nach Bild EG6922A zusammengeschaltet.

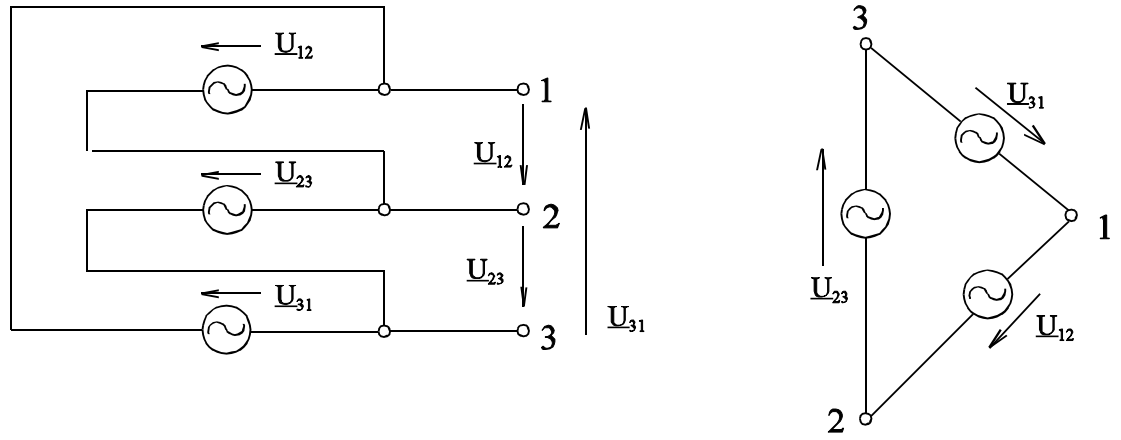
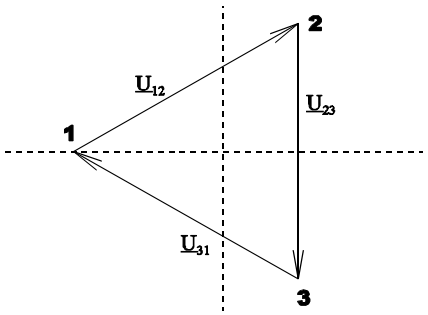


Bild EG6922A

Warum die Dreieckschaltung ihren Namen bekommen hat, ist aus dem linken Teil von Bild EG6922A nicht zu erkennen, wohl aber aus dem rechten Teil des Bildes. Bei der Dreieckschaltung sind nur drei Spannungen vorhanden, jeweils um 120° phasenverschoben, siehe Bild EG6922B.



$\underline{U}_{12} = U_L \angle 30^\circ$

$\underline{U}_{23} = U_L \angle -90^\circ$

$\underline{U}_{31} = U_L \angle -210^\circ$

Bild EG6922B

Die Wahl des Winkeloffsets ist beliebig. Hier könnte eine der Leiterspannung zu 0° gewählt werden. Damit mit der Sternschaltung identische Winkel vorhanden sind, wird auch hier der Winkel von U_{12} zu 30° gewählt.

Bei der Dreieckschaltung sind Strang- und Leiterspannungen gleich

$$U_{str} = U_L$$

Der Vergleich der Bilder EG6922B und EG621B zeigt an der Klemmen (1, 2, 3) keinen Unterschied. Die Spannungen nach außen hin können (bei geschickter Wahl der Größen) bei Stern- und Dreieckschaltung die gleichen sein.

6.9.3. Schaltungen der Verbraucher

In den Unterabschnitten dieses Kapitel sollen untersucht werden:

- symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter
- symmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter
- symmetrische Dreieckschaltung
- unsymmetrische Dreieckschaltung
- unsymmetrische Sternschaltung mit Nulleiter
- unsymmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter.

Im Prinzip wären alle Schaltungen mit den Methoden für lineare Netzwerke, Kap. 6.8, zu berechnen. Dabei ergebe sich ein komplexes Gleichungssystem der Ordnung 3 mal z, also dreifacher Ordnung. Da symmetrische Drehstromverbraucher sehr häufig vorkommen, sollen bessere Möglichkeiten gefunden werden, Drehstromnetze einfacher zu berechnen.

6.9.3.1. Symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter

(Zusammenfassung auf Arbeitsblatt EGII-22)

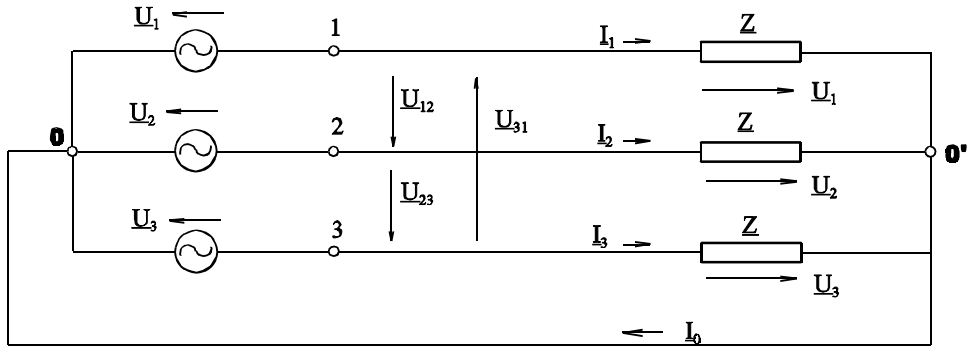


Bild EG6931A: Symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter

Durch die Verbindung der beiden Sternpunkte von Verbraucher und Quelle liegen die entsprechenden Strangspannungen der Quelle n auch an den Verbrauchern, siehe Bild EG6931A. Das ohmsche Gesetz liefert

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_1 * e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_1 * e^{-j120^\circ}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_1 * e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_1 * e^{-j240^\circ}$$

hier bilden die Ströme I_1 bis I_3 auch ein symmetrisches Drehstromsystem. Der Strom im Nulleiter ergibt sich aus der Knotensumme im Sternpunkt:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1[1 + e^{-j120^\circ} + e^{-j240^\circ}] = 0$$

Wichtig: Bei der symmetrischen Sternschaltung mit Nulleiter ist der Strom im Nulleiter Null.

Strangstrom - Leiterstrom

Da der Leiterstrom auch durch den Strang fließt gilt:

$$I_L = I_{str}$$

Strangspannung - Leiterspannung

Aus Kap. 6.9.2.1 folgt,

$$U_L = \sqrt{3} * U_{str}$$

daß die Leiterspannungen um den Faktor $\sqrt{3}$ größer sind, als die Strangspannungen.

Leistung

Die komplexe Scheinleistung an den drei Verbrauchern wird aufsummiert:

$$\underline{S} = \underline{U}_1 * \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 * \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 * \underline{I}_3^*$$

$$\underline{S} = \underline{U}_1 * \underline{I}_1^* + \underline{U}_1 * e^{-j120^\circ} * \underline{I}_1^* e^{j120^\circ} + \underline{U}_1 * e^{-j240^\circ} * \underline{I}_1^* * e^{j240}$$

$$\underline{S} = 3 * \underline{U}_1 * \underline{I}_1^* \qquad S = 3*U_1*I_1$$

Fazit: Im symmetrischen Fall kann mit der dreifachen Leistung eines Stranges gerechnet werden.

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} \qquad \underline{I}_1^* = \frac{\underline{U}_1^*}{\underline{Z}^*} \qquad \underline{Z} = Z * e^{j\varphi_Z} \qquad \underline{Z^*} = Z * e^{-j\varphi_Z}$$

$$\underline{S} = 3 * \underline{U}_1 * \frac{\underline{U}_1^*}{\underline{Z}^*} = \frac{3 * U_1^2}{Z * e^{-j\varphi_Z}} = 3 * U_1 * \frac{U_1}{Z} * e^{j\varphi_Z}$$

$$\underline{S} = 3 * U_1 * I_1 * e^{j\varphi_Z}$$

$$\underline{S} = 3*U_1*I_1*[\cos(\varphi_Z + \sin(\varphi_Z)]$$

Meßbar von außen sind die Leitergrößen deshalb wird ersetzt:

$$U_1 = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \qquad \text{und} \qquad I_1 = I_L$$

$$\underline{S} = 3 * \frac{U_L}{\sqrt{3}} * I_L * e^{j\varphi_Z} = \sqrt{3} * U_L * I_L * e^{j\varphi_Z}$$

$$\underline{S} = S * e^{j\varphi_Z} = \sqrt{3} * U_L * I_L * [\cos(\varphi_Z) + j\sin(\varphi_Z)] = P + jQ$$

$$S = \sqrt{3} * U_L * I_L$$

$$P = \sqrt{3} * U_L * I_L * \cos(\varphi_Z)$$

$$Q = \sqrt{3} * U_L * I_L * \sin(\varphi_Z)$$

Arbeitsblatt EGII-22 Symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter

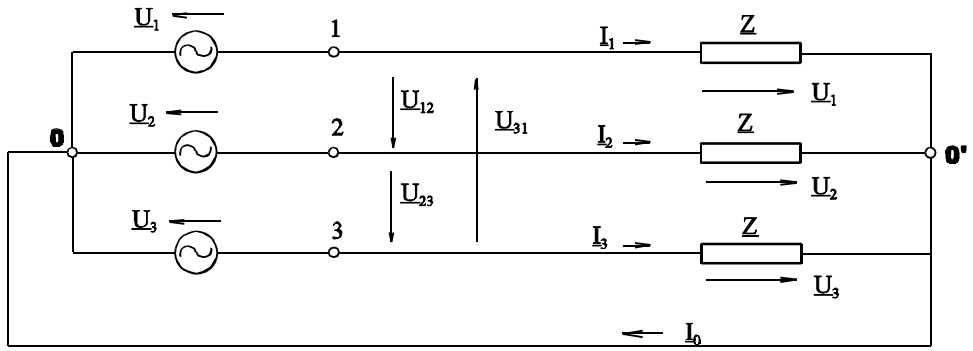


Bild EG6931A: Symmetrische Sternschaltung mit Nulleiter

gegeben: $\underline{U}_1 = 230.9\ V\angle 0^\circ$ $\underline{Z} = 50\ \Omega\angle 20^\circ$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{230.9\ V\angle 0^\circ}{50\ \Omega\angle 20^\circ} = 4.618\ A\angle -20^\circ$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_1 * e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_1 * e^{-j120^\circ} = 4.618\ A\angle -140^\circ$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_1 * e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_2 * e^{-j240^\circ} = 4.618\ A\angle -260^\circ$$

$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

$\underline{I}_0 = \underline{I}_1[1 + e^{-j120^\circ} + e^{-j240^\circ}] = 0$

Wichtig: Bei der symmetrischen Sternschaltung mit Nulleiter ist der Strom im Nulleiter Null.

Zusammenhang: Strang-Leiter-Größen

$I_L = I_{str}$ $U_L = \sqrt{3} * U_{str}$ hier: $U_L = \sqrt{3} * 230.9\ V = 400\ V$

Leistungen:

$S = \sqrt{3} * U_L * I_L$ $P = \sqrt{3} * U_L * I_L * \cos(\varphi_Z)$ $Q = \sqrt{3} * U_L * I_L * \sin(\varphi_Z)$

S = 3200 VA P = 3007 W Q = 1094 Var

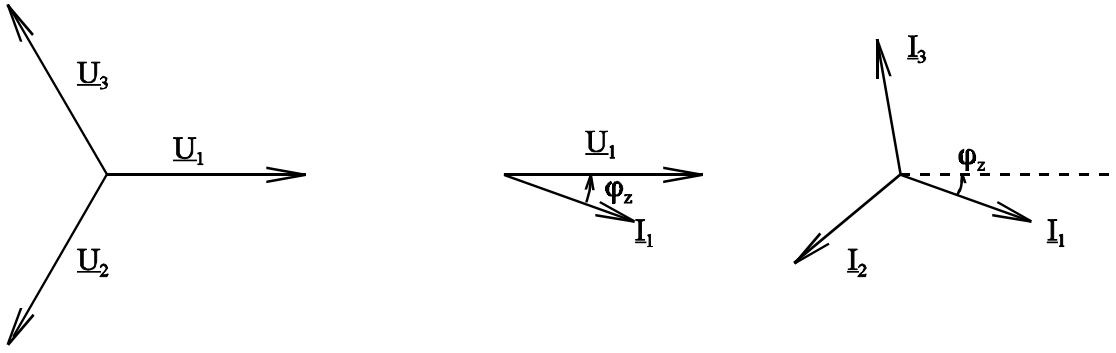


Bild EG6931B

6.9.3.2. Symmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter

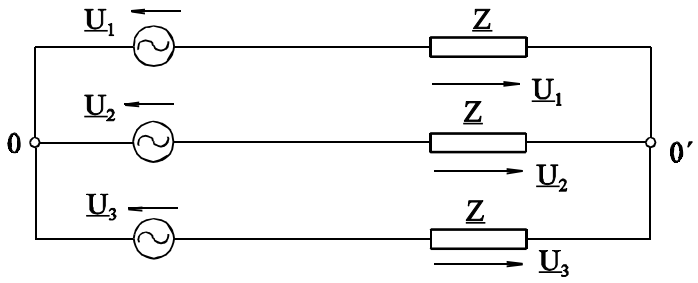


Bild EG6932A

Im letzten Abschnitt wurde festgestellt, daß in der leitenden Verbindung 0 - 0' kein Strom fließt. Wenn das so ist, kann diese auch entfernt werden, ohne das sich was ändert. Somit ergeben sich für die symmetrische Sternschaltung ohne Nullleiter die gleichen Formeln als im letzten Abschnitt für die symmetrische Sternschaltung mit Nullleiter.

Aufgabe 6.9.2 a rechnen

6.9.3.3. Symmetrische Dreieckschaltung

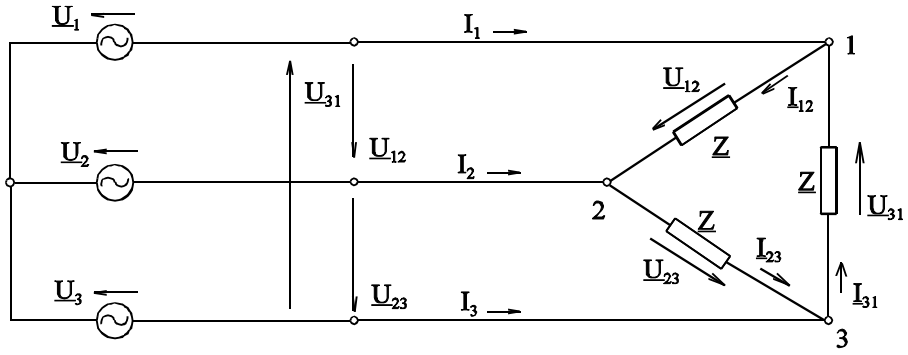


Bild EG6933A: Symmetrische Dreieckschaltung

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{U_{12}\angle\varphi_{u12} - \varphi_Z}{\underline{Z}}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{12} * e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{12} * e^{-j120^\circ}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{12} * e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{12} * e^{-j240^\circ}$$

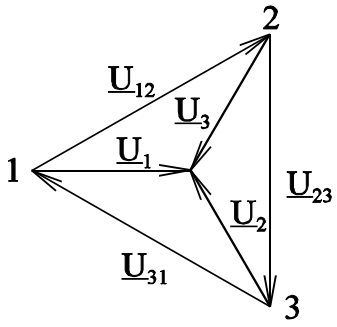
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12}[1 - e^{-j240^\circ}] = \underline{I}_{12}\sqrt{3}\angle -30^\circ$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = \underline{I}_{12}[e^{-j120^\circ} - 1] = \underline{I}_{12}\sqrt{3}\angle -150^\circ$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = \underline{I}_{12}[e^{-j240^\circ} - e^{-j120^\circ}] = \underline{I}_{12}\sqrt{3}\angle -270^\circ$$

Die Leiterströme sind vom Betrag das $\sqrt{3}$ fache der Strangströme. Die Phase ist um jeweils 120° nacheilend

Beispiel ohmsche Belastung ($\varphi_Z = 0$)



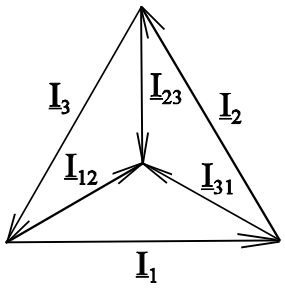


Bild EG6933B

Strangspannung - Leiterspannung $U_L = U_{str}$

Strangstrom $I_{str} = \frac{U_L}{Z}$

Strangstrom => Leiterstrom $I_L = \sqrt{3} * I_{str}$

Leistung

$$\underline{S} = \underline{S}_{12} + \underline{S}_{23} + \underline{S}_{31}$$

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} * \underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23} * \underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31} * \underline{I}_{31}^*$$

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} * \frac{\underline{U}_{12}^*}{\underline{Z}^*} + \underline{U}_{12} * e^{-j120^\circ} * \frac{\underline{U}_{12}^* e^{j120^\circ}}{\underline{Z}^*} + \underline{U}_{12} * e^{-j240^\circ} * \frac{\underline{U}_{12}^* * e^{j240}}{\underline{Z}^*} = 3\frac{U_{12}^2}{Z^*} = 3\frac{U_{12}^2}{Z * e^{-j\varphi_Z}}$$

$$\underline{S} = 3 * U_{12}^2 \frac{1}{Z} * e^{j\varphi_Z} = 3 * U_{12} * I_{12} * e^{j\varphi_Z}$$

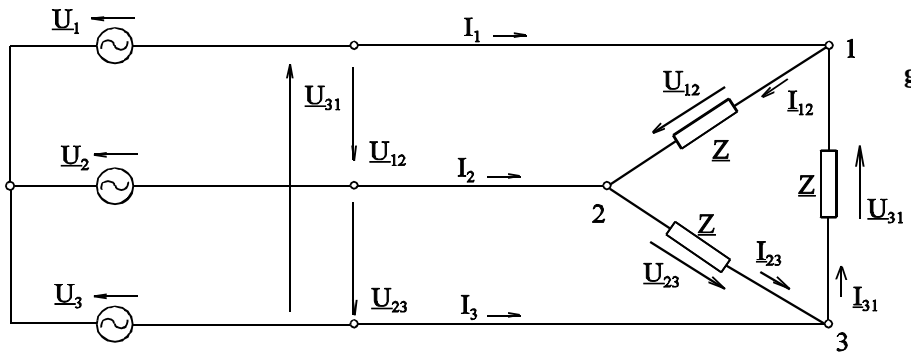
$U_{12} = U_L$ $\qquad I_{12} = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$

$$\underline{S} = 3 * \underline{U}_L * \frac{\underline{I}_L}{\sqrt{3}} * e^{j\varphi_Z}$$

$$\underline{S} = \sqrt{3} * U_L * I_L * [\cos(\varphi) + j\sin(\varphi_Z)]$$

Vom den Leitergrößen her sind die Formeln für die Leistung bei der symmetrischen Stern- und Dreiecksschaltung gleich.

Arbeitsblatt EGII-23 Symmetrische Dreieckschaltung



gegeben:

$\underline{U}_{12} = 400\ V\angle 30°$

$\underline{Z} = 50\ \Omega\angle 20°$

Bild EG6933A: Symmetrische Dreieckschaltung

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{400\ V\angle 30°}{50\ \Omega\angle 20°} = 8.00\ A\angle 10°$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{12} * e^{-j120°}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{12} * e^{-j120°} = 8.00\ A\angle -110°$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{12} * e^{-j240°}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{12} * e^{-j240°} = 8.00\ A\angle -230°$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12}[1 - e^{-j240°}] = \underline{I}_{12}\sqrt{3}\angle -30° = 8.00\ A\angle 10° * \sqrt{3}\angle -30° = 13.86\ A\angle -20°$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = \underline{I}_{12}[e^{-j240°} - 1] = \underline{I}_{12}\sqrt{3}\angle -150° = 13.86\ A\angle -140°$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = \underline{I}_{12}[e^{-j240°} - e^{-j120°}] = \underline{I}_{12}\sqrt{3}\angle -270° = 13.86\ A\angle -260°$$

Zusammenhang: Strang-Leiter-Größen

$$I_L = \sqrt{3} * I_{str} \qquad U_L = U_{str}$$

Leistungen: $S = \sqrt{3} * U_L * I_L$ $P = \sqrt{3} * U_L * I_L * \cos(\varphi_Z)$ $Q = \sqrt{3} * U_L * I_L * \sin(\varphi_Z)$

S = 9600 VA P = 9021 W Q = 3283 Var

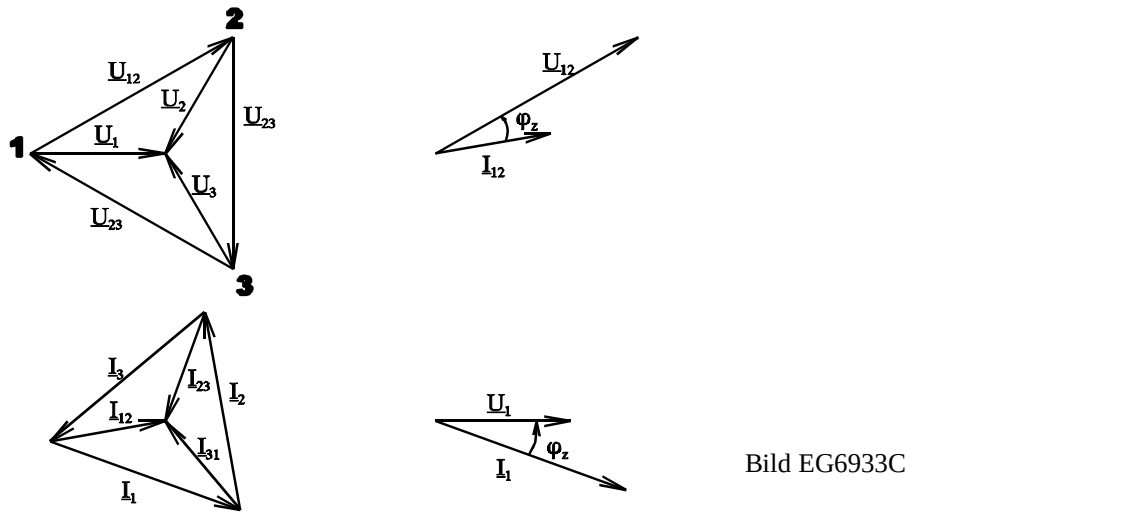


Bild EG6933C

6.9.3.4. Unsymmetrische Dreieckschaltung

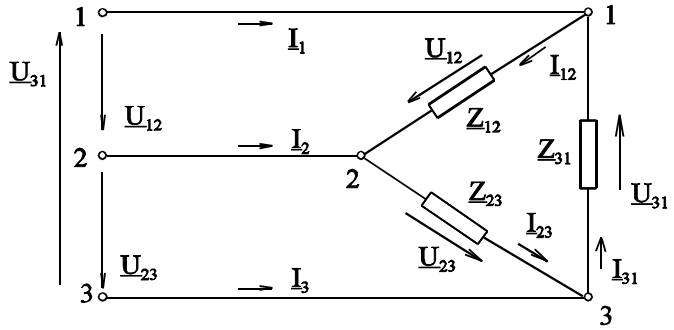


Bild EG6934A

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{12} * e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{12} * e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}_{31}}$$

$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}$

$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}$

$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$

Leistung

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} * \underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23} * \underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31} * \underline{I}_{31}^*$$

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} * \frac{\underline{I}_{12}^*}{\underline{Z}_{12}^*} + \underline{U}_{12} * e^{-j120^\circ} * \frac{\underline{U}_{12}^* e^{j120^\circ}}{\underline{Z}_{23}^*} + \underline{U}_{12} * e^{-j240^\circ} * \frac{\underline{U}_{12}^* * e^{j240}}{\underline{Z}_{31}^*}$$

$$\underline{S} = U_{12}^2 \left(\frac{1}{Z_{12}^*} + \frac{1}{Z_{23}^*} + \frac{1}{Z_{31}^*} \right)$$

$$\underline{S} = U_L^2 \left[\frac{1}{Z_{12}} * e^{j\varphi_{Z12}} + \frac{1}{Z_{23}} * e^{j\varphi_{Z23}} + \frac{1}{Z_{31}} * e^{j\varphi_{Z31}} \right]$$

Arbeitsblatt EGII-24 Unsymmetrische Dreieckschaltung

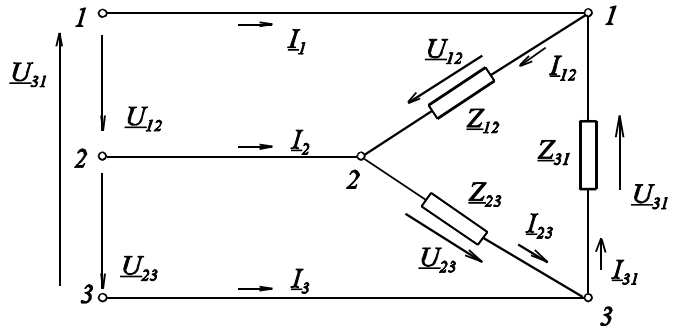


Bild EG6934B

gegeben:

$\underline{U}_1 = 230.9\ V\ \underline{/0^\circ}$

$\underline{U}_2 = 230.9\ V\ \underline{/-120^\circ}$

$\underline{U}_3 = 230.9\ V\ \underline{/-240^\circ}$

$\underline{Z}_{12} = 15\ \Omega\ \underline{/-60^\circ}$

$\underline{Z}_{23} = 20\ \Omega\ \underline{/-40^\circ}$

$\underline{Z}_{31} = 30\ \Omega\ \underline{/-20^\circ}$

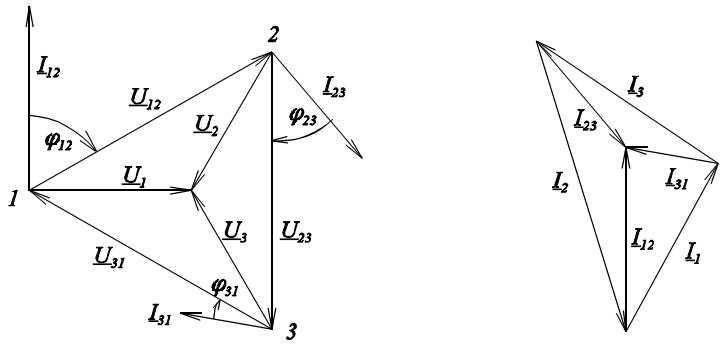


Bild EG6934C

Lösung:

$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ $\quad$ $\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3$ $\quad$ $\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1$

$\underline{U}_{12} = 400\ V\ \underline{/30^\circ}$ $\quad$ $\underline{U}_{23} = 400\ V\ \underline{/-90^\circ}$ $\quad$ $\underline{U}_{31} = 400\ V\ \underline{/-210^\circ}$

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} \qquad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} \qquad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}$$

$\underline{I}_{12} = 26.67\ A\ \underline{/90^\circ}$ $\quad$ $\underline{I}_{23} = 20\ A\ \underline{/-50^\circ}$ $\quad$ $\underline{I}_{31} = 13.33\ A\ \underline{/-190^\circ}$

$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}$ $\quad$ $\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}$ $\quad$ $\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$

$\underline{I}_1 = 27.67\ A\ \underline{/61.67^\circ}$ $\quad$ $\underline{I}_2 = 43.91\ A\ \underline{/-72.98^\circ}$ $\quad$ $\underline{I}_3 = 31.41\ A\ \underline{/145.84^\circ}$

Aufgabe 6.9.4a rechnen

6.9.3.5. Unsymmetrische Sternschaltung mit Nulleiter

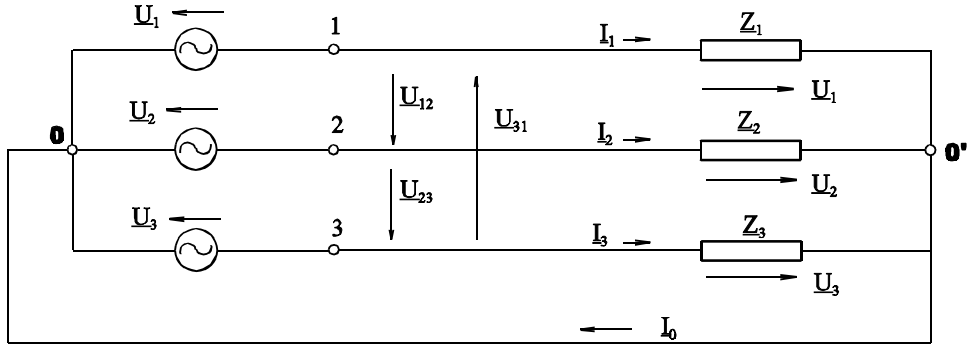


Bild EG6935A

Weil die Sternpunkte verbunden sind, wirkt die Schaltung wie drei Wechselspannungsquellen, die drei Verbraucher versorgen, siehe Bild EG6921A.

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_1 * e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_1 * e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}_3}$$

Der Strom $\underline{I}_0$ im Nulleiter ergibt sich durch Summierung

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_3$$

$$\underline{I}_0 = \underline{U}_1 \left[\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}_2} + \frac{e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}_3} \right]$$

Leistung

$$\underline{S} = \underline{U}_1 * \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 * \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 * \underline{I}_3^*$$

$$\underline{S} = U_1^2 * \frac{1}{\underline{Z}_1^*} + U_2^2 * \frac{1}{\underline{Z}_2^*} + U_3^2 * \frac{1}{\underline{Z}_3^*}$$

$$U_1^2 = \frac{U_L^2}{3} = U_2^2 = U_3^2$$

$$\underline{S} = \frac{U_L^2}{3} \left[\frac{1}{Z_1} * e^{j\varphi_{Z1}} + \frac{1}{Z_2} * e^{j\varphi_{Z2}} + \frac{1}{Z_3} * e^{j\varphi_{Z3}} \right]$$

Arbeitsblatt EGII-25 Unsymmetrische Sternschaltung mit Nulleiter

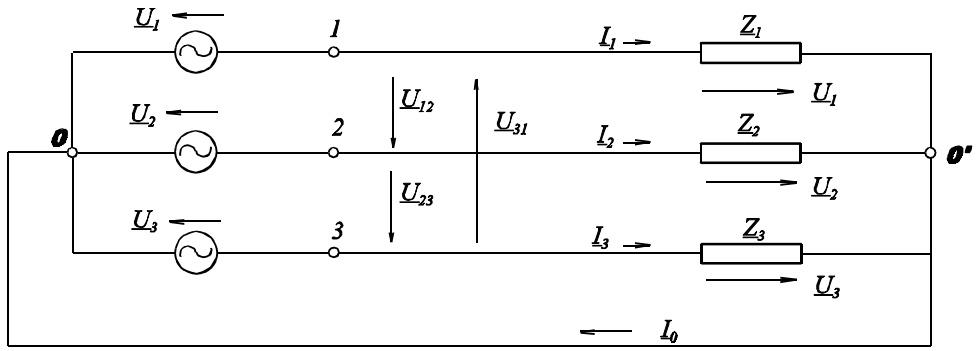


Bild EG6935A

gegeben: $\underline{Z}_1 = 36\ \Omega\ \underline{/10^\circ}$ $\underline{Z}_2 = 56\ \Omega\ \underline{/15^\circ}$ $\underline{Z}_3 = 112\ \Omega\ \underline{/20^\circ}$

$\underline{U}_{str} = 230.9\ V$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{230.9\ V\ \underline{/0^\circ}}{36\ \Omega\ \underline{/10^\circ}} = 6.42\ A\ \underline{/-10^\circ}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{230.9\ V\ \underline{/-120^\circ}}{56\ \Omega\ \underline{/15^\circ}} = 4.12\ A\ \underline{/-135^\circ}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{230.9\ V\ \underline{/-240^\circ}}{112\ \Omega\ \underline{/20^\circ}} = 2.06\ A\ \underline{/100^\circ}$$

$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 3.64\ A\ \underline{/-33.30^\circ}$

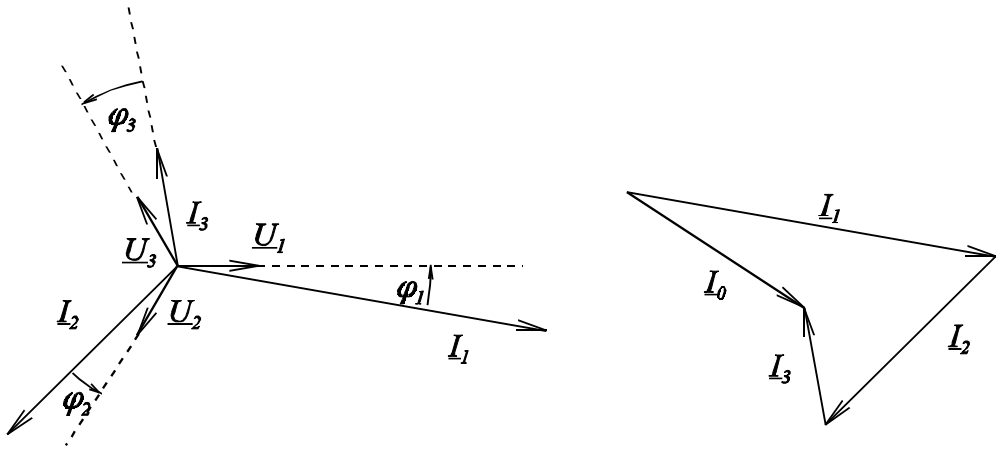


Bild EG6935B

Aufgabe 6.9.5a rechnen

6.9.3.6. Unsymmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter

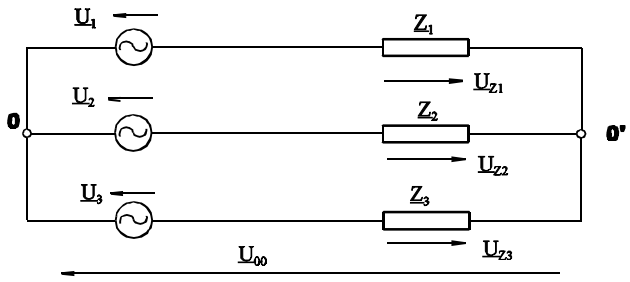


Bild EG6936A

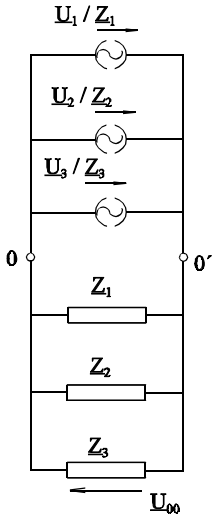
Wird der Nulleiter weggelassen (siehe Bild EG6936A), ergibt sich eine Spannung U_{00} zwischen den Sternpunkten von Verbraucher und Quelle. Dadurch sind die Spannungen Verbraucher Strang und Quelle nicht mehr gleich, sondern nach Bild EG6936A ergibt sich:

$$\underline{U}_{Z1} = \underline{U}_1 - \underline{U}_{00}$$

$$\underline{U}_{Z2} = \underline{U}_2 - \underline{U}_{00}$$

$$\underline{U}_{Z3} = \underline{U}_3 - \underline{U}_{00}$$

Wäre die Spannung U_{00} bekannt, bereitet die Berechnung des oberen Netzwerkes keine Schwierigkeit. Da gibt es nun verschiedene Methoden, z.B. Methoden aus Kap. 6.8: lineare Wechselstromnetze. Durch Netzwerk-Umformung ergibt sich:



$$\underline{Z}_{123} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}}$$

$$\underline{I}_q = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{I}_q = \underline{U}_1 \left[\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}_2} + \frac{e^{-j240^\circ}}{\underline{Z}_3} \right]$$

Bild EG6936B

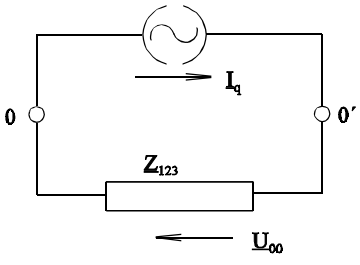


Bild EG6936C

$$\underline{U}_{00} = \underline{I}_q * \underline{Z}_{123}$$

Damit können die einzelnen Stränge berechnet werden.

Arbeitsblatt EGII-26 Unsymmetrische Sternschaltung ohne Nulleiter

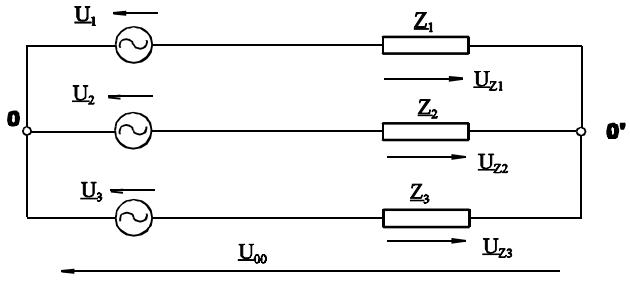


Bild EG6936A

gegeben:

$\underline{Z}_1 = 36\ \Omega\ \underline{/10^\circ}$

$\underline{Z}_2 = 56\ \Omega\ \underline{/15^\circ}$

$\underline{Z}_3 = 112\ \Omega\ \underline{/20^\circ}$

$\underline{U}_{str} = 219.4V = \frac{380\ V}{\sqrt{3}}$ alt!

$\frac{400\ V}{\sqrt{3}} = 230.9\ V$ neu

alt: 380V neu: 400 V

$$\underline{I}_q = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = 3.46\ A\ \underline{/-33.30^\circ}$$

$$Z_{123} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = 18.37\ \Omega\ \underline{/13.27^\circ}$$

$\underline{U}_{00} = \underline{I}_0 * \underline{Z}_{123} = 63.5\ V\ \underline{/-20.03^\circ}$

$\underline{U}_{Z1} = \underline{U}_1 - \underline{U}_{00} = 219.4\ V\ \underline{/0^\circ} - 63.5\ V\ \underline{/-20.03^\circ} = 161.2\ V\ \underline{/7.76^\circ}$

$\underline{U}_{Z2} = \underline{U}_2 - \underline{U}_{00} = 219.4\ V\ \underline{/-120^\circ} - 63.5\ V\ \underline{/-20.03^\circ} = 238.7\ V\ \underline{/-135.20^\circ}$

$\underline{U}_{Z3} = \underline{U}_3 - \underline{U}_{00} = 219.4\ V\ \underline{/-240^\circ} - 63.5\ V\ \underline{/-20.03^\circ} = 271.2\ V\ \underline{/128.66^\circ}$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{Z1}}{\underline{Z}_1} = \frac{161.2\ V\ \underline{/7.75^\circ}}{36\ \Omega\ \underline{/10^\circ}} = 4.48\ A\ \underline{/-2.24^\circ}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{Z2}}{\underline{Z}_2} = \frac{238.7\ V\ \underline{/-135.19^\circ}}{56\ \Omega\ \underline{/15^\circ}} = 4.26\ A\ \underline{/-150.20^\circ}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{Z3}}{\underline{Z}_3} = \frac{271.2\ V\ \underline{/128.65^\circ}}{112\ \Omega\ \underline{/20^\circ}} = 2.42\ A\ \underline{/108.66^\circ}$$

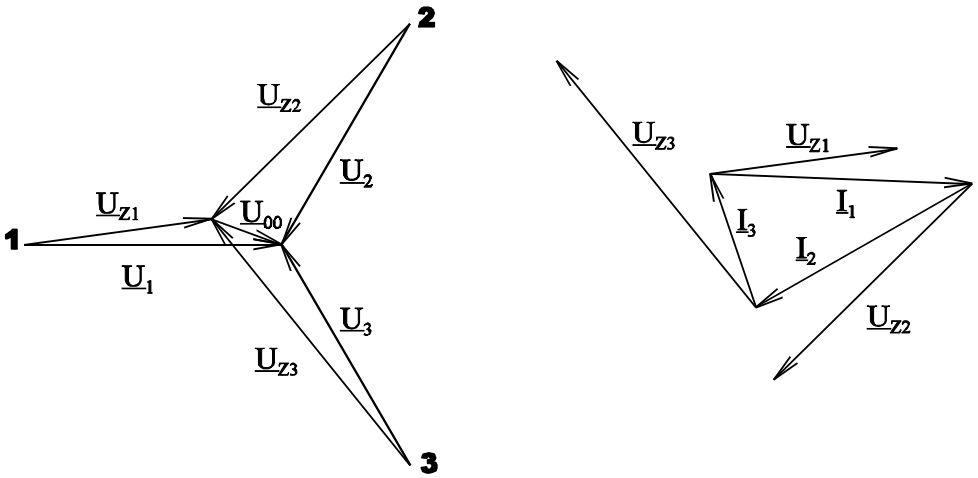


Bild EG6936D

Aufgabe 6.9.6a rechnen

6.9.4. Rechts- und linksdrehendes Drehstromsystem

normal: Rechtsdrehend

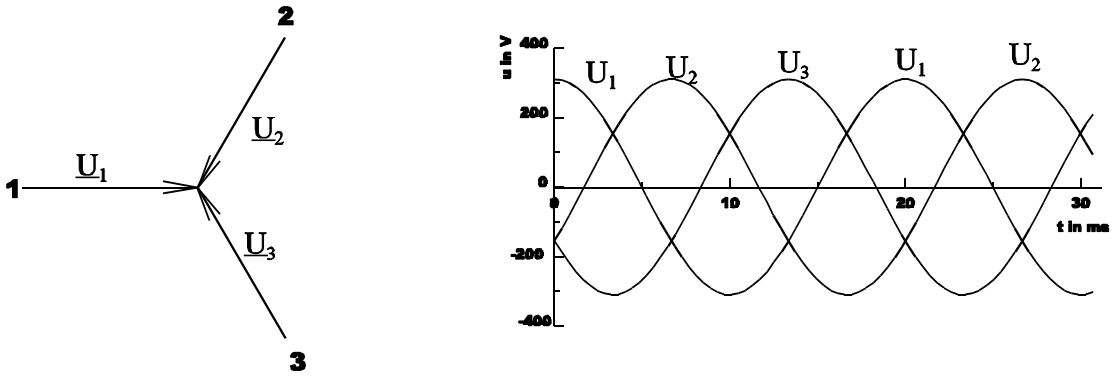


Bild EG694A

Sonderfall: Linksdrehend (2 Phasen vertauscht)

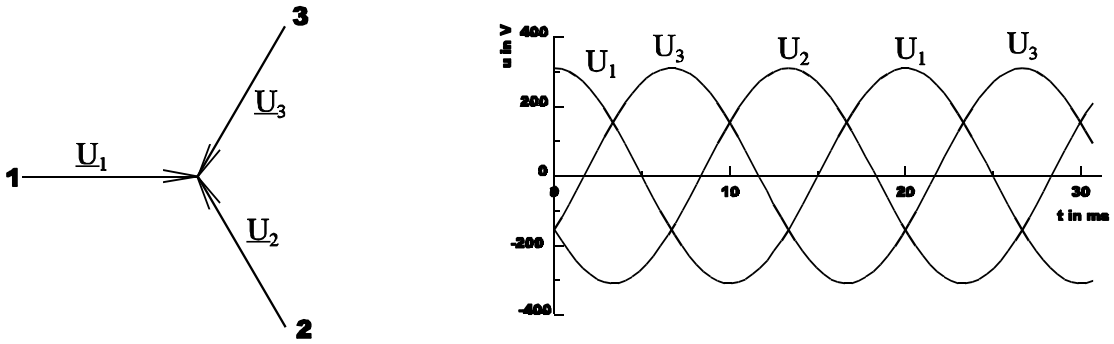
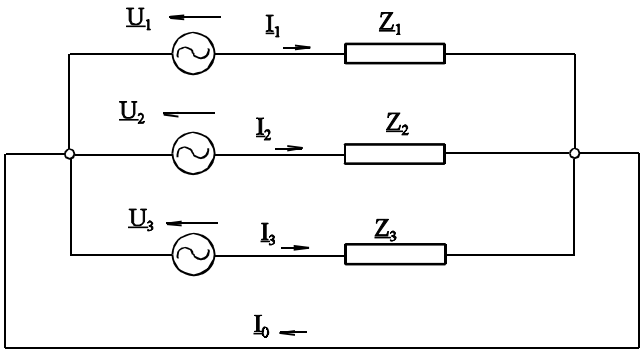


Bild EG694B

Beispiel rechtsdrehend:



gegeben:

$\underline{U}_1 = 220\ V\ \underline{/0^\circ}$

$\underline{U}_2 = 220\ V\ \underline{/-120^\circ}$

$\underline{U}_3 = 220\ V\ \underline{/-240^\circ}$

$\underline{Z}_1 = 22\ \Omega\ \underline{/0^\circ}$

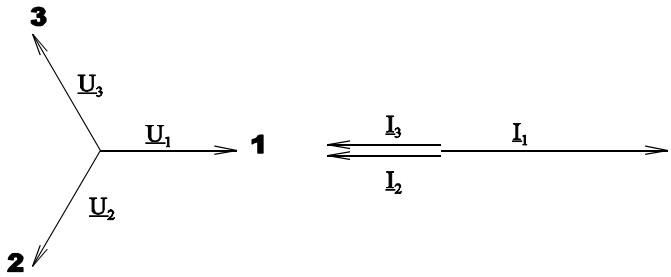
$\underline{Z}_2 = 44\ \Omega\ \underline{/60^\circ}$

$\underline{Z}_3 = 44\ \Omega\ \underline{/-60^\circ}$

Bild EG694C

zu berechnen: $\underline{I}_1 = 10\ A\ \underline{/0^\circ}$ $\underline{I}_2 = 5\ A\ \underline{/-180^\circ}$ $\underline{I}_3 = 5\ A\ \underline{/-180^\circ}$ $\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$

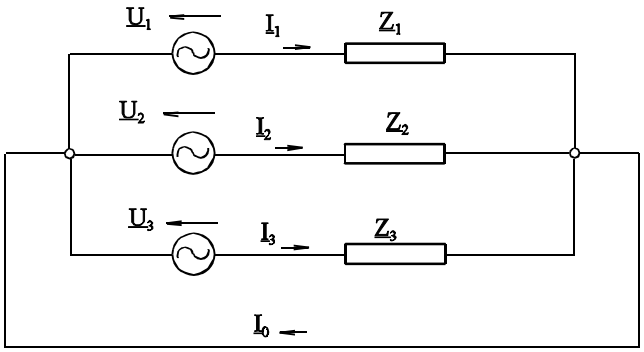
=> quasi Symmetrisch weil Stromsumme Null



$\underline{I}_0 = 0$

Bild EG694D

Beispiel linksdrehend:



gegeben:

$\underline{U}_1 = 220\ V\ \underline{/0^\circ}$

$\underline{U}_2 = 220\ V\ \underline{/-240^\circ}$

$\underline{U}_3 = 220\ V\ \underline{/-120^\circ}$

$\underline{Z}_1 = 22\ \Omega\ \underline{/0^\circ}$

$\underline{Z}_2 = 44\ \Omega\ \underline{/60^\circ}$

$\underline{Z}_3 = 44\ \Omega\ \underline{/-60^\circ}$

Bild EG694E

zu berechnen: $\underline{I}_1 = 10\ A\ \underline{/0^\circ}$ $\underline{I}_2 = 5\ A\ \underline{/-300^\circ} = 5\ A\ \underline{/60^\circ}$

$\underline{I}_3 = 5\ A\ \underline{/-60^\circ}$ $\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 15\ A\ \underline{/0^\circ}$

!!! => hochgradig unsymmetrisch bei gleicher Last aber Phasen vertauscht.

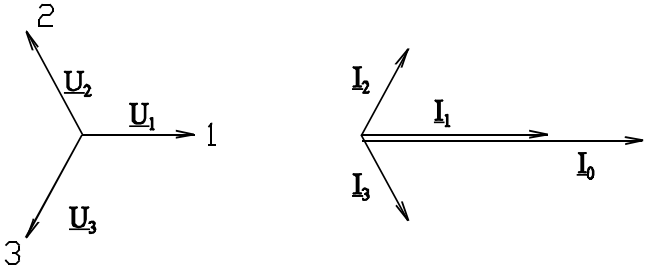


Bild EG694F

6.9.5. Leistungsmessung bei Drehstrom

6.9.5.1. Ein-Wattmeter-Methode

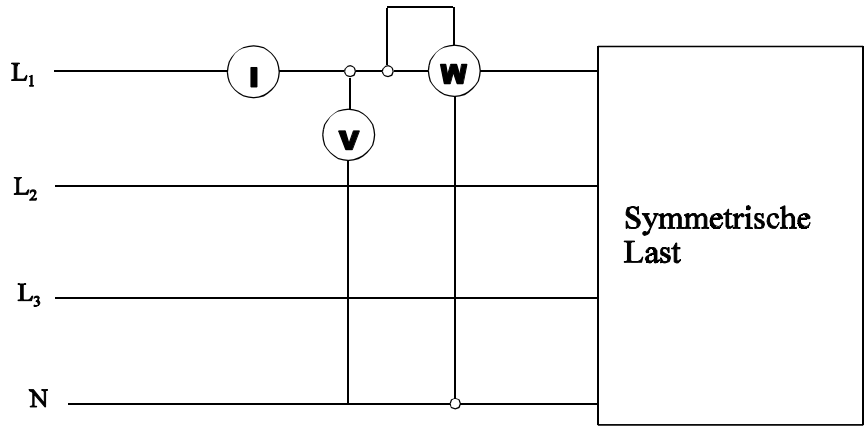


Bild EG6951A

$P_{ges} = 3P_1$ $S_{ges} = 3*U*I$ $Q_{ges} = \sqrt{S_{ges} - P_{ges}}$

Wenn kein Sternpunkt vorhanden ist, muß ein künstlicher gebildet werden, siehe Bild EG6951B. Dabei muß gelten:

$R << R_{meß}$

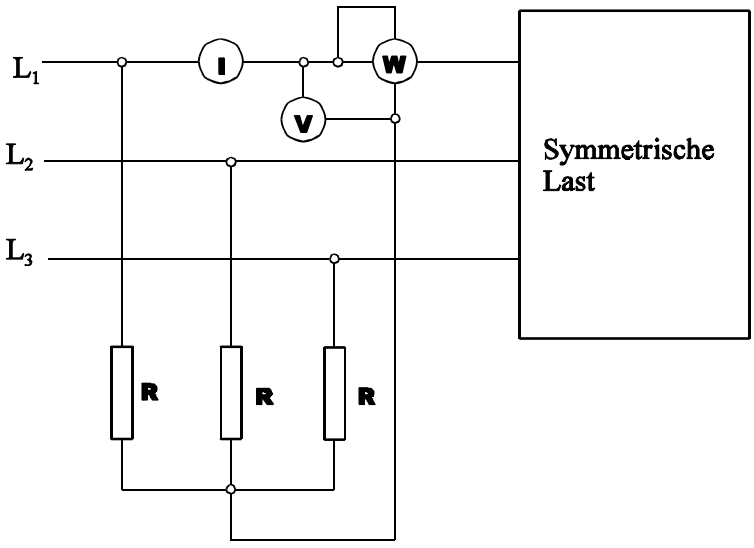


Bild EG6951B: Künstlicher Sternpunkt

6.9.5.2. Drei-Wattmeter-Methode

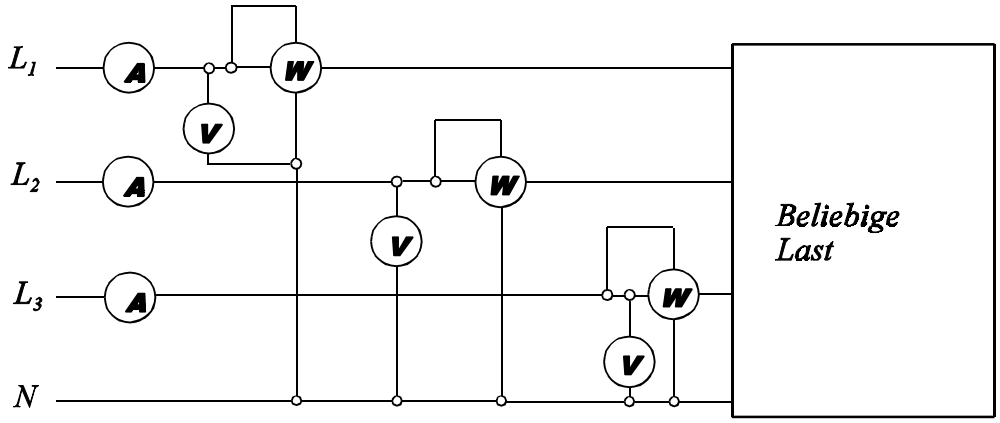


Bild EG6952A

$S_1 = U_1 * I_1$ $\qquad Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2}$

$S_2 = U_2 * I_2$ $\qquad Q_2 = \sqrt{S_2^2 - P_2^2}$

$S_3 = U_3 * I_3$ $\qquad Q_3 = \sqrt{S_3^2 - P_3^2}$

$P_{ges} = P_1 + P_2 + P_3$ $\qquad Q_{ges} = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$$S_{ges} = \sqrt{P_{ges}^2 + Q_{ges}^2}$$

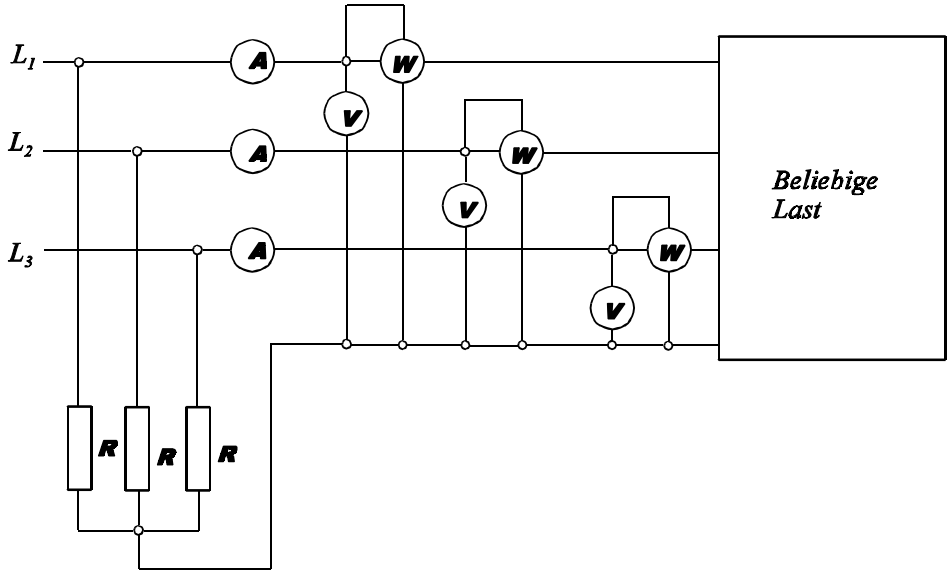


Bild EG6952B: Mit künstlichen Sternpunkt ($R << R_{meß}$)

6.9.5.3. Zwei-Wattmeter-Methode (Aron Schaltung)

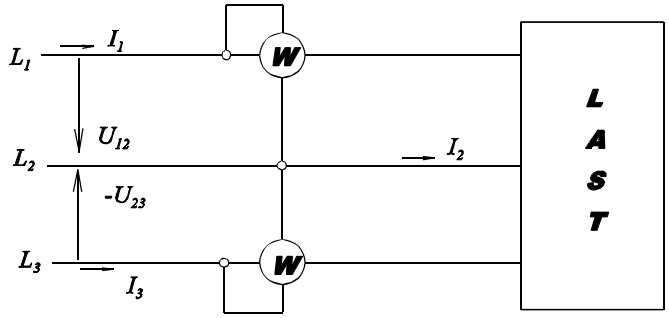


Bild EG6953A

$P_1 = Re\{\underline{U}_{12} * \underline{I}_1^*\}$ $P_2 = Re\{\underline{U}_{32} * \underline{I}_3^*\}$

$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ $\underline{U}_{32} = \underline{U}_3 - \underline{U}_2$

$P = P_1 + P_2 = Re\{(\underline{U}_1 - \underline{U}_2) * I_1^*\} + Re\{\underline{U}_3 - \underline{U}_2) I_3^*\}$

$(P_1 - P_2) = Re\{\underline{U}_{12} * \underline{I}_1^* - \underline{U}_{32} * \underline{I}_3^*\}$

$P_1 + P_2 = Re\{\underline{U}_1 * \underline{I}_1^* - \underline{U}_2 * \underline{I}_1^* + \underline{U}_3 * \underline{I}_3^* - \underline{U}_2 * \underline{I}_3^*\}$

$P_1 + P_2 = Re\{\underline{U}_1^* \underline{I}_1^* - \underline{U}_2(\underline{I}_1^* + \underline{I}_3^*) + \underline{U}_3 * \underline{I}_3^*\}$

$-(\underline{I}_1^* + \underline{I}_3^*) = \underline{I}_2$

$P_1 + P_2 = Re\{\underline{U}_1 * \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 * \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 * \underline{I}_3^*\} = P_{ges}$

$P_{ges} = P_1 + P_2$ Für beliebige Last

Bedingung: Kein Nulleiter, weil $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$

$(P_1 - P_2) = Re\{\underline{U}_{12} * \underline{I}_1^* + \underline{U}_{23} * \underline{I}_3^*\}$

Ansatz einer symmetrischen Last in Sternschaltung: $\underline{Z} = Z * e^{j\varphi}$

$\underline{U}_{12} = U_L \angle 30^\circ$ $\underline{U}_{23} = U_L \angle -90^\circ$

$\underline{U}_1 = U_{str} \angle 0^\circ$ $\underline{I}_1 = I_L \angle -\varphi$ $\underline{I}_1^* = I_L \angle \varphi$

$\underline{U}_3 = U_{str} \angle -240^\circ$ $\underline{I}_3 = I_L \angle -240^\circ - \varphi$ $\underline{I}_3^* = I_L \angle \varphi + 240^\circ$

$(P_1 - P_2) = Re\{U_L \angle 30^\circ * I_L \angle \varphi + U_L \angle -90^\circ * I_L \angle \varphi + 240^\circ\}$

$(P_1 - P_2) = U_L * I_L \, Re\{e^{+j\varphi} * (e^{j30^\circ} + e^{j150^\circ}\}$ $e^{+j30^\circ} + e^{j150^\circ} = e^{j90^\circ}$

$(P_1 - P_2) = U_L * I_L \, Re\{e^{j\varphi} * e^{j90^\circ}\}$

$(P_1 - P_2) = U_L * I_L \, Re\{e^{j(\varphi + 90^\circ)}\}$

$(P_1 - P_2) = U_L * I_L \cos(\varphi + 90^\circ) = U_L * I_L [-\sin(\varphi)]$

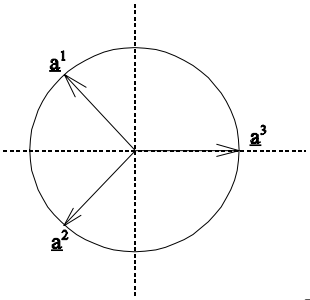
$(P_2 - P_1) = U_L * I_L * \sin(\varphi)$

$Q = \sqrt{3} * U_L * I_L * \sin(\varphi) = \sqrt{3} * (P_2 - P_1)$

$Q = \sqrt{3}(P_2 - P_1)$ rechtsdrehende Last symmetrisch	$P = P_1 + P_2$, kein Nulleiter
$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$	

Bedingung: kein Nulleiter und symmetrische Last

6.9.6. Drehfaktor



$\underline{a} = e^{j120^\circ}$

$\underline{a}^2 = e^{-j120^\circ}$

$\underline{a}^3 = 1$

Bild EG696A

$\underline{U}_1 = U_{str}$ $\underline{U}_2 = \underline{a}^2 * U_{str}$ $\underline{U}_3 = \underline{a}^1 * U_{str}$ $\underline{U}_1 = \underline{a}^3 * U_{str}$

$\underline{U}_{12} = U_L \angle 30^\circ$ $\underline{U}_{12}$

$\underline{U}_{23} = U_L \angle -90^\circ$ $\underline{U}_{23} = \underline{U}_{12} * a^2$

$\underline{U}_{31} = U_L \angle -210^\circ$ $\underline{U}_{31} = \underline{U}_{12} * a$

symmetrischer Fall

$\underline{I}_1$ $\underline{I}_2 = \underline{I}_1 * \underline{a}^2$ $\underline{I}_3 = \underline{I}_1 * \underline{a}$

rechtsdrehend	**linksdrehend**
$\underline{U}_2 = a^2 \underline{U}_1$	$\underline{U}_2 = a * \underline{U}_1$
$\underline{U}_3 = a * \underline{U}_1$	$\underline{U}_3 = a^2 \underline{U}_1$

6.9.7. Symmetrische Komponenten

Anwendung: Unsymmetrische Last.

Ziel: Die unsymmetrische Größen sollen besser beschrieben werden.

Lösung: Es werden drei Systeme nach Bild EG697A eingeführt

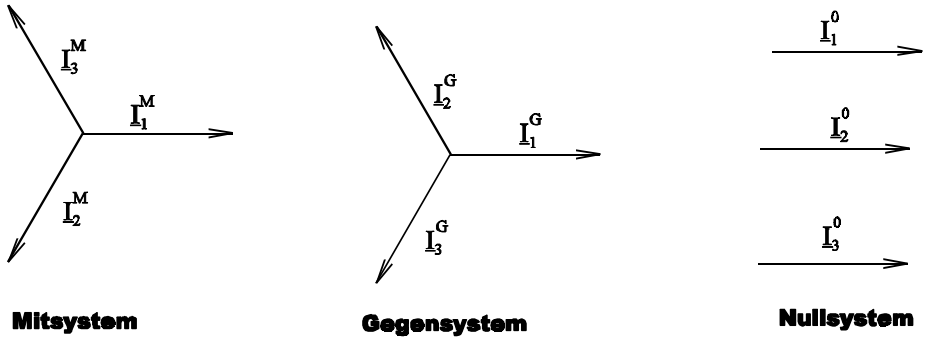


Bild EG697A

Mitsystem: normales Drehstromsystem (rechtsdrehend)
Gegensystem: entgegengesetzt drehendes Drehstromsystem (linksdrehend)
Nullsystem: 3 Quellen mit gleicher Phasenverschiebung (hier 0)

Aus Bild EG697A läßt sich mit Hilfe des Drehfaktors (Kap. 6.9.6) ablesen:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_M$	$\underline{I}_1^G = \underline{I}_G$	$\underline{I}_1^0 = \underline{I}_0$
$\underline{I}_2 = \underline{I}_M * a^2$	$\underline{I}_2^G = \underline{I}_G * a$	$\underline{I}_2^0 = \underline{I}_0$
$\underline{I}_3 = \underline{I}_M * a$	$\underline{I}_3^G = \underline{I}_G * a^2$	$\underline{I}_3^0 = \underline{I}_0$

Durch den folgenden Ansatz soll versucht werden, die gegebenen unsymmetrischen Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ zu beschreiben:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1^M + \underline{I}_1^G + \underline{I}_1^0 \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_2^M + \underline{I}_2^G + \underline{I}_2^0 \qquad \underline{I}_3 = \underline{I}_3^M + \underline{I}_3^G + \underline{I}_3^0$$

Die Größen "2" und "3" mit Hilfe des Drehfaktors $\underline{a}$ ausgedrückt ergibt:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_M + \underline{I}_G + \underline{I}_0 \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_M * \underline{a}^2 + \underline{I}_G * \underline{a} + \underline{I}_0 \qquad \underline{I}_3 = \underline{I}_M * \underline{a} + \underline{I}_G * \underline{a}^2 + \underline{I}_0$$

Die oberen drei Gleichungen werden zur Matrix-Schreibweise zusammengefaßt:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_M \\ \underline{I}_G \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix}$$

Durch Invertieren der oberen Matrix erhält man:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_M \\ \underline{I}_G \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix}$$

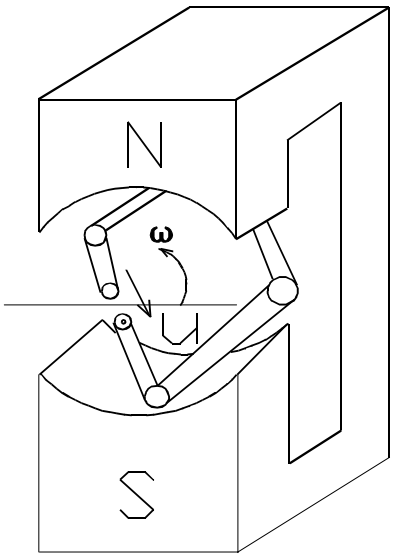
Damit lassen sich unsymmetrische Spannungen und Ströme durch 3 symmetrische Systeme beschreiben, die bei linearen Netzen überlagerbar sind.

6.10. Erzeugung von Wechselstrom

Es ist schon sehr viel über Wechselstrom diskutiert worden. Wie erzeugt man eigentlich Wechselstrom? Zwei Arten:

Energietechnik:	durch Generatoren (wenig durch Stromrichter)
Nachrichtentechnik:	durch spezielle Schaltungen mit Schwingkreisen, Quarzen und anderen Bauelementen

Das Generatorprinzip soll hier kurz andeutet werden.



Drehung einer Spule im Magnetfeld

Vorgriff aufs 3. Semester

$$u(t) = N * \frac{d\Phi}{dt}$$

$\Phi = A*B$

$A = A_{max}*\cos(\omega t)$

$\Phi = A_{max}*B*\cos(\omega t)$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -A_{max} * B * \omega * \sin(\omega t)$$

$$u = \frac{-N * A_{max} * B * \omega * \hat{u}}{\hat{u}} \sin(\omega t)$$

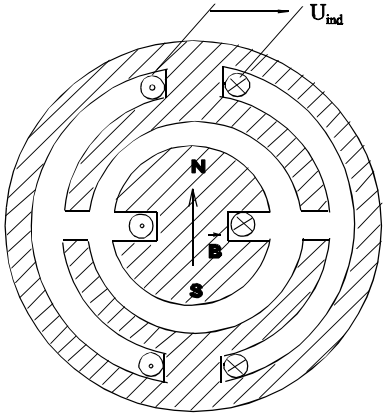
$u = \hat{u}*\sin(\omega t) = \hat{u}*\cos(\omega t + 90^\circ)$

Bild EG610

In realen Generatoren herrscht nun nicht ein homogenes Magnetfeld über so große Entfernungen. Im dritten Semester wird erläutert, daß der magnetische Kreis von Eisen geführt wird. Dadurch wird dann das magnetische Feld im Luftspalt annähernd homogen.

Merke: Durch Drehung einer Spule im Magnetfeld wird eine Spannung induziert.

Aber auch durch Drehung eines Magneten in einer Spulenanordnung wird eine Spannung induziert, siehe Bild EG610B.



Generatoren arbeiten meist mit Innenpolen. Bei großen Generatoren wird nicht mit Magneten sondern mit Gleichstromspulen der magnetische Fluß erzeugt.

In der Energietechnik ist das Ziel, möglichst Spannungen ohne Oberschwingungen zu erzeugen. Oberschwingungen bilden Netzstörungen. Leitungen bilden größtenteils einen induktiven Widerstand => erhöhte Blindwiderstände für Oberwellen => größerer Spannungsabfall durch Oberwellen. Durch geometrische Form der Wicklungen und der Polschuhe im Generator können Oberwellen verhindert werden.

Bild EG610B

Drehstrom
Durch eine räumlich versetzte Anordnung der Spulen wird eine zeitlich Verschiebung des magnetischen Spulenflusses erreicht. Ordnet man drei Spulen um 120° räumlich versetzt an, ergeben sich auch Spannungen, die um 120° phasenverschoben sind.

7. Elektrisches Strömungsfeld

7.1. Feldbegriffe

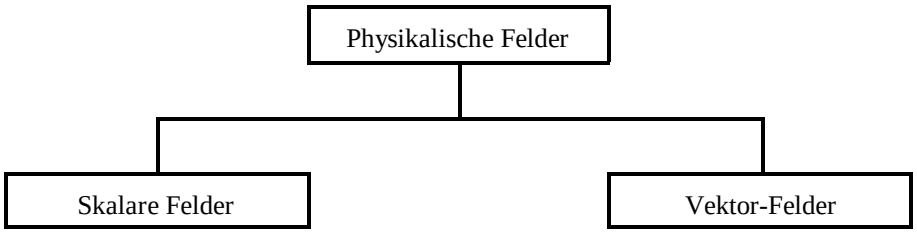
Was ist ein Feld?

- Ein Feld beschreibt einen physikalischen Zustand innerhalb eines Raumes (allgemein vierdimensionalen Raum).

 - 3 Koordinatenrichtungen x, y, z
 - Zeit t

- Dieser Zustand wird durch eine physikalische Feldgröße beschrieben, die jedem Punkt des Raumes zugeordnet wird.

- Die Gesamtheit aller Werte im Raum läßt Feld



Beispiele für skalare Felder:

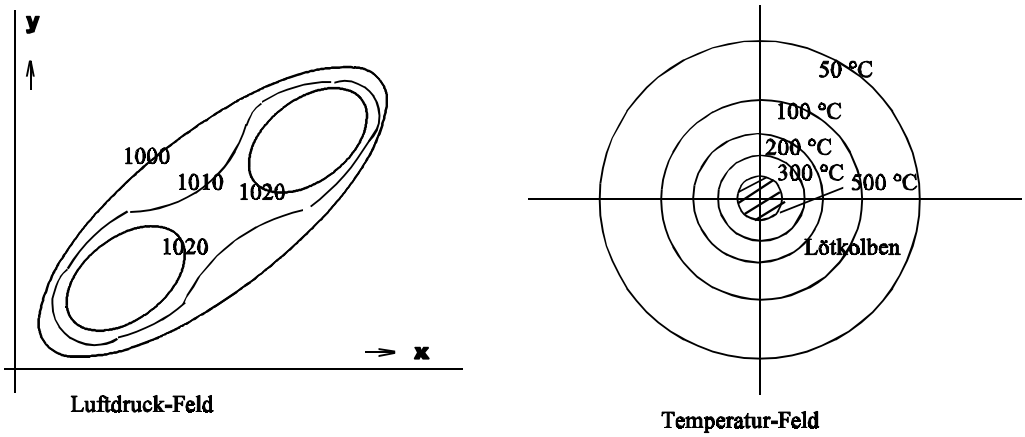


Bild EG71A

Beispiel für ein Vektorfeld: Strömungsfeld

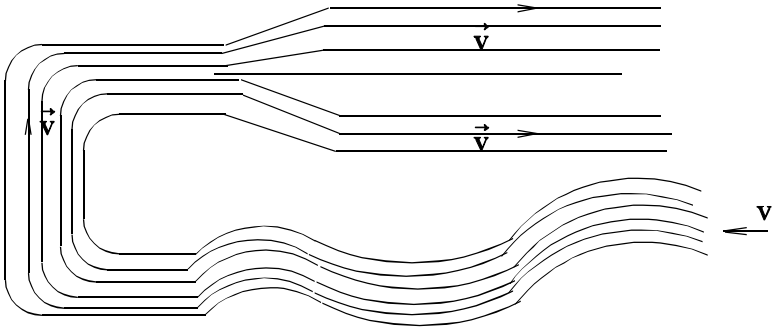


Bild EG71B

Feldlinie

Die mathematische Feldbeschreibung ist durch Formeln möglich. Anschaulicher aber sind Feldlinien. Was ist nun eine Feldlinie?

Die Feldlinien im Skalar-Feld heißen Potentiallinien

Die Potentiallinie ist der Ort wo die skalare physikalische Größen gleiche Werte aufweist (z.B. ϑ = const oder p = const) Äquipotential- oder Potentiallinien werden diese Linien genannt.

Feldlinie im Vektorfeld

Im Vektorfeld ist die Feldlinie in Richtung des Feldvektors gerichtet (im Strömungsfeld in Richtung des $\vec{v}$ -Vektors).

Die Dichte der Feldlinien ist ein Maß für den Betrag der Feldgröße.

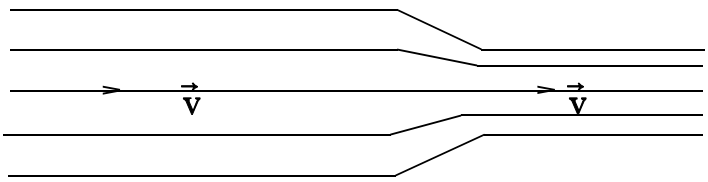


Bild EG71C

Homogene Felder sind durch äquidistante und parallele Feldlinien gekennzeichnet. Bei **inhomogenen** Feldern laufen die Feldlinien nicht parallel, siehe Bild EG71D.

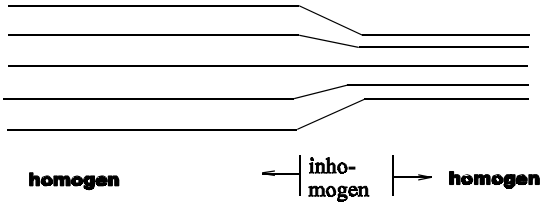


Bild EG71D

Stationäre Felder sind Felder, die zeitunabhängig sind (eingeschwungener Zustand).

Instationäre Felder sind zeitabhängig.

Wirbelfreie Felder

$rot(\vec{v}) = 0$

Felder mit Wirbeln

$rot(\vec{v}) \neq 0$

Potentialfelder sind wirbelfrei

Quellenfreie Felder

$div(\vec{v}) = 0$

Felder mit Quellen

$div(\vec{v}) \neq 0$

Umrechnung von Vektor in Skalar-Feld

Wenn ein Feld wirbel- und quellenfrei ist, kann ein Vektorfeld (z.B. $\vec{v}$) auch durch eine Skalarfunktion beschrieben werden:

$$\vec{v} = grad\,[\varphi(x, y, z)]$$

$$\vec{v} \rightarrow \varphi(x, y, z)$$

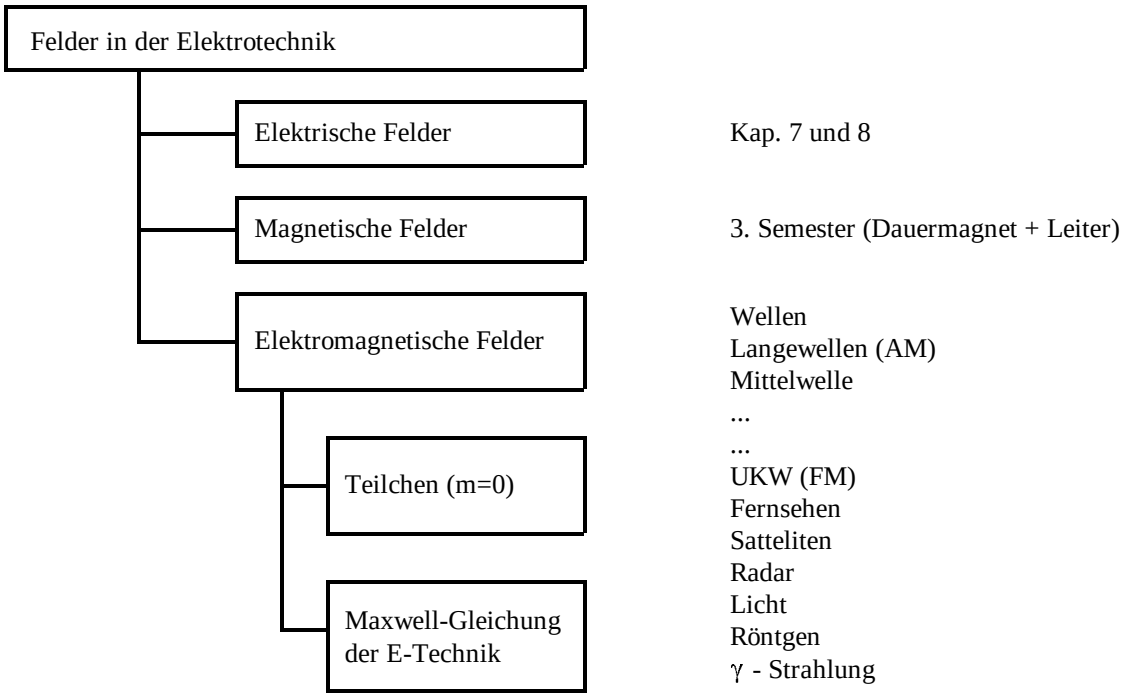
$$\varphi_2(x_2, y_2, z_2) - \varphi_1(x_1, y_1, z_1) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{v}(x, y, z)d\vec{s}$$

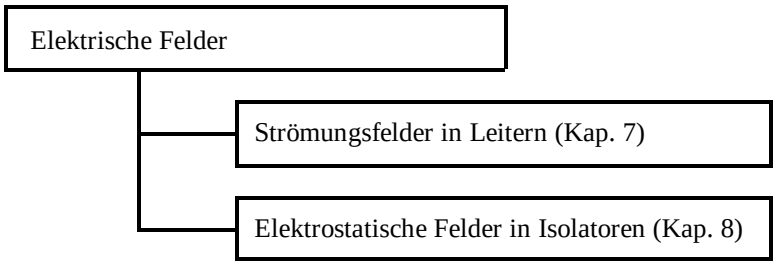
Felder in angepaßten Koordinaten

- Kartesische Koordinaten
- Zylinder Koordinaten
- Kugel Koordinaten

Wichtig: Feldgröße ist von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, wohl der die Komponenten in Richtung der Einheitsvektoren.

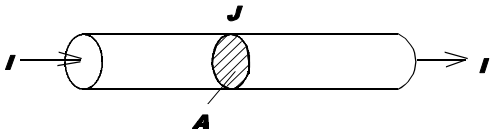
7.2. Feldarten in der Elektrotechnik





7.3. Stromdichte und Strom

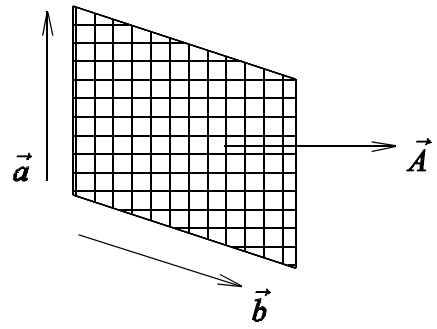
Wiederholung: Aus dem ersten Semester ist der Zusammenhang zwischen Stromdichte und Strom mit Hilfe der Fläche A bekannt, siehe Bild EG73A.



$$J = \frac{I}{A} \quad [J] = \frac{A}{m^2} \qquad I = J*A$$

Bild EG73A

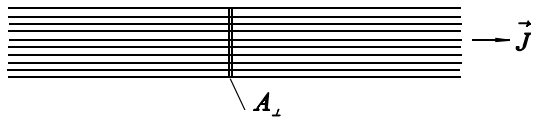
Der obere Zusammenhang ist einfach und gilt nur für den Fall, daß die Fläche senkrecht zur Stromrichtung vorhanden ist. Die Stromdichte ist eine gerichtete physikalische Größe, also ein Vektor. Der Strom ist ein skalare Summengröße. Wie erhält man aus dem Vektor $\vec{J}$ mit Hilfe der Fläche den Skalar I? Ist nun die Fläche ein Vektor oder ein Skalar? Die Fläche hat im Raum eine Ausrichtung, ist also auch im Vektor. Welche Richtung hat nun der Flächenvektor? Dazu siehe Bild EG73B.



Flächenvektor steht senkrecht auf der Fläche

$$\vec{A} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Bild EG73B



$I = A_{\perp} * J$

Bild EG73C

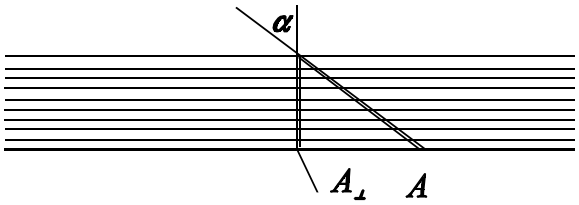


Bild EG73D

$A_{\perp} = A*\cos(\alpha)$

$I = A_{\perp}*J = J*A*\cos(\alpha)$

$A = \vec{a}*\vec{b} = a*b*\cos(\sphericalangle \vec{a}, \vec{b})$

$I = \vec{J}*\vec{A}$ homogene Felder

$dI = \vec{J}*d\vec{A}$ inhomogene Felder

$I = \int dI$

$$I = \int_{(A)} \vec{J}*d\vec{A}$$

7.4. Potential und Feldstärke

Der Zusammenhang zwischen Potential und Feldstärke ist am einfachstem an einem homogenen (gleicher Querschnitt) Widerstandsdraht zu erklären, der an einer Spannungsquelle angeschlossen ist.

A] Eindimensional (Draht in x-Richtung)

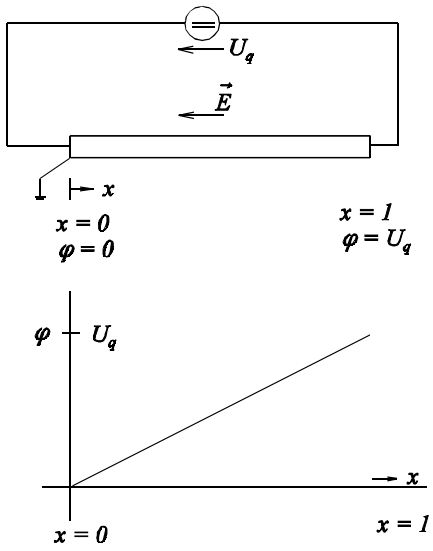


Bild EG74A

$$\varphi = U_q * \frac{x}{l} = \frac{U_q}{l} * x$$

E - *Feldstärke* $= \frac{Spannung}{Länge}$

$$[E] = \frac{V}{m} \qquad E = \frac{U_q}{l} \qquad E_x = -\frac{U_q}{l}$$

Elektrische Feldstärke zeigt vom Punkt hoher Spannung (hohem Potential) zum Punkt niedriger Spannung (Potential). Feldstärke und Strom zeigen in die gleiche Richtung

$$\varphi = \frac{U_q}{l} * x = -E_x * x \qquad \frac{d\varphi}{dx} = -E_x \qquad \varphi = \int d\varphi \qquad d\varphi = -E_x dx$$

$$\int_1^2 d\varphi = -\int_1^2 E_x * dx \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = -E_x * x$$

Eindimensional	
$\frac{d\varphi}{dx} = -E_x$	$\int_1^2 d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = U_{21} = -\int_1^2 E_x * dx$

B] Zweidimensional

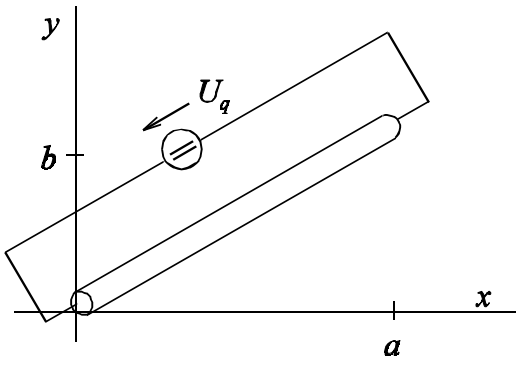


Bild EG74C

$$\varphi(x) = \frac{U_q}{a} * x \qquad E_x = -\frac{U_q}{a}$$

$$\varphi(y) = \frac{U_q}{b} * y \qquad E_y = -\frac{U_q}{b}$$

$\varphi(x) = -E_x * x$

$\varphi(y) = -E_y * y$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_x \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -E_y$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = -grad(\varphi)$$

Berechnung des Potentials aus der Feldstärke:

eindimensional war es einfach: $d\varphi = -E_x dx$ => $\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 E_x * dx$

mehrdimensional: $d\varphi = -\vec{E} * d\vec{s}$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} * d\vec{s}$$

Beispiel: Potentialberechnung zweidimensional aus der Feldstärke

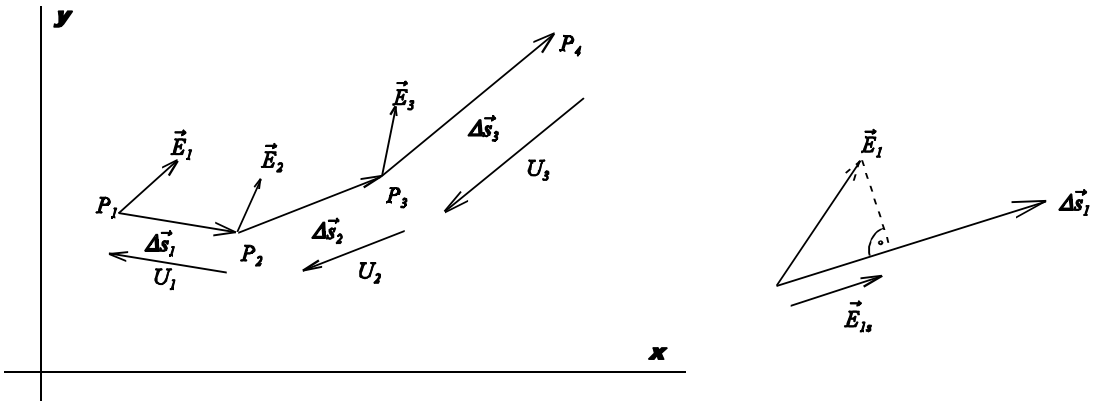


Bild MA7121C

$$U_1 = -E_{1s} * \Delta s_1 = -E_1 * \Delta s_1 * \cos(\sphericalangle \vec{E}_1, \Delta \vec{s}_1) = -\vec{E}_1 * \Delta \vec{s}_1$$

$$U_{41} = \varphi_4 - \varphi_1 = (U_1 + U_2 + U_3) = -(\vec{E}_1 * \Delta \vec{s}_1 + \vec{E}_2 * \Delta \vec{s}_2 + \vec{E}_3 * \Delta \vec{s}_3) = -\sum_{i=1}^{3} \vec{E}_i * \Delta \vec{s}_i$$

$$U_{41} = \varphi_4 - \varphi_1 = -\int \vec{E} * d\vec{s}$$

7.5. Ursache der elektrischen Strömung in Leitern

Die Kraft auf eine Ladung im elektrischen Feld wird zwar erst in Kap. 8 erläutert:

$\vec{F} = q * \vec{E}$ Kraft = Ladung * Feldstärke

A] E = 0 => keine geordnete Bewegung der Ladungsträger nach Bild EG75A

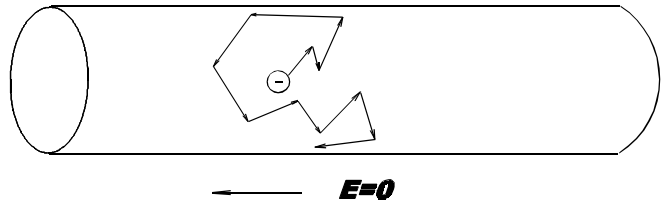


Bild EG75A

B] E ≠ 0 => geordnete Bewegung überlagert sich der unregelmäßigen

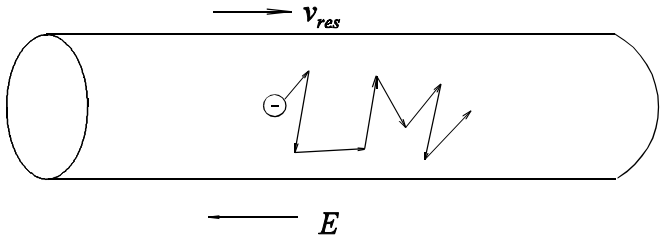


Bild EG75B

Spannung → Feldstärke → Stromdichte → Strom

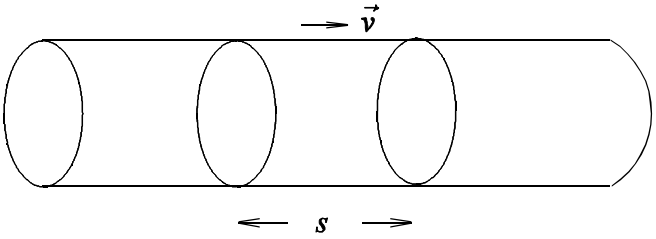


Bild EG75C

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}[n * q * V] = \frac{d}{dt}[n * q * A * s]$$

n - Ladungsträgerdichte $[n] = \frac{1}{m^3}$

q - Elementarladung $q = 1.6*10^{-19}$ As

$$I = n * q * A * \frac{ds}{dt} = n * q * A * v_{res}$$

$$\frac{I}{A} = J = n * q * V_{res}$$

Ansatz: $v_{res} = b*E$ b - Beweglichkeit der Ladungsträger

$$[b] = \frac{[v]}{[E]} = \frac{m/s}{V/m} = \frac{m^2}{Vs}$$

$J = n*q*b*E$

$$\vec{J} = n * q * b * \vec{E}$$

7.6. Ohmsches Gesetz in Elementarform

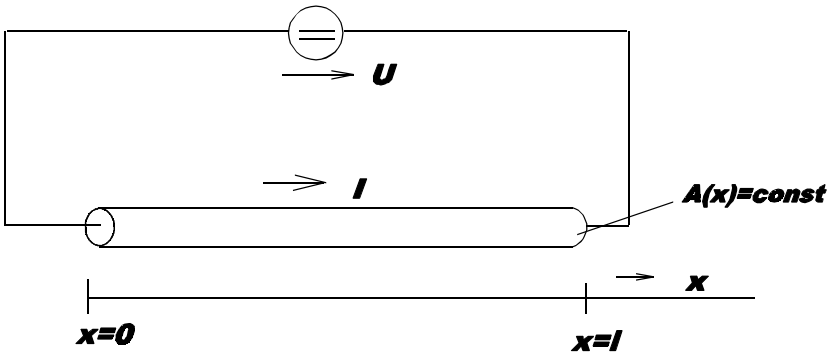


Bild EG76A

$$R = \frac{1}{\varkappa} * \frac{l}{A} \qquad I = \frac{U}{R}$$

$$I = \frac{U}{\frac{l}{\varkappa * A}} = \varkappa * A * \frac{U}{l}$$

$$\frac{I}{A} = \varkappa * \frac{U}{l} \qquad \frac{I}{A} = J \qquad \frac{U}{l} = E$$

J = ϰ*E

$$\vec{J} = \varkappa * \vec{E}$$ **Ohmsches Gesetz in Elementarform**

Vergleich mit Kap. 7.5: $\vec{J} = n * q * b * \vec{E}$

ϰ = n*q*b

7.7. Leistungsdichte im Strömungsfeld

homogen: $P = U * I = \frac{U}{l} * \frac{I}{A} * A * l$

P = E*J*l*A V = l*A

P = E*J*V homogen, gesamt

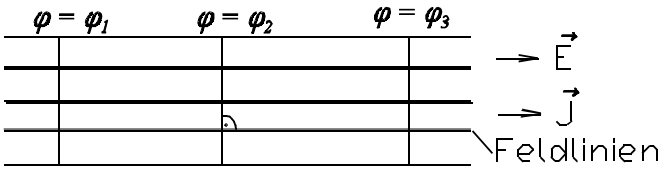
$dP = \vec{E} * \vec{J} * dV$ homogen, differentiell

$\vec{J} = \varkappa * \vec{E}$ $\vec{J} * \vec{E} = \varkappa * \vec{E} * \vec{E} = \varkappa * E^2$

$$dP = \vec{E} * \vec{J} * dV = \varkappa * E^2 * dV = \frac{J^2}{\varkappa} * dV$$

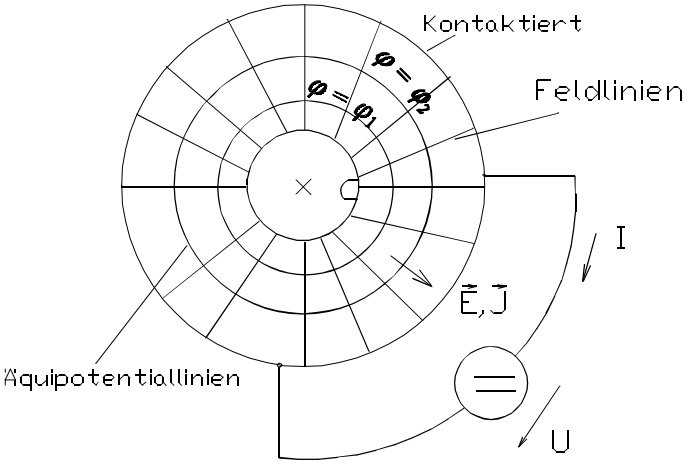
$$P = \int_{(V)} \vec{E} * \vec{J} * dV = \varkappa * \int_{(V)} E^2 * dV = \frac{1}{\varkappa} \int J^2 * dV$$

7.8. Feldlinien und Äquipotentiallinien



$\varphi = \varphi_1 = \text{const}$
$\varphi = \varphi_2 = \text{const}$
$\varphi = \varphi_3 = \text{const}$

Bild EG78A



Kontaktiert $\varkappa \rightarrow \infty$

Äquipotentiallinien

$\varphi = \text{const}$

Bild EG78B

Äquipotentiallinien stehen immer senkrecht zu den Feldlinien, weil keine Strömung in Richtung gleichen Potentials erfolgt.

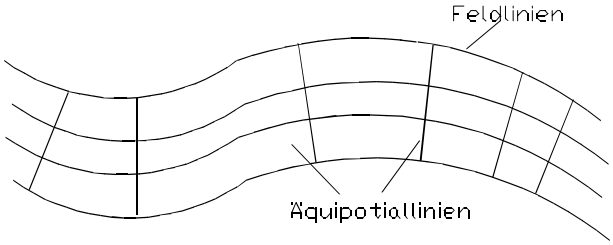


Bild EG78C

Verlauf
guter Leiter - schlechter Leiter

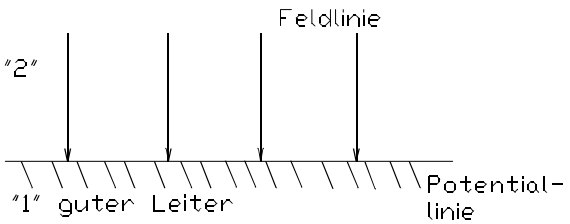


Bild EG78D

Verlauf Grenzschicht
Leiter-Nichtleiter

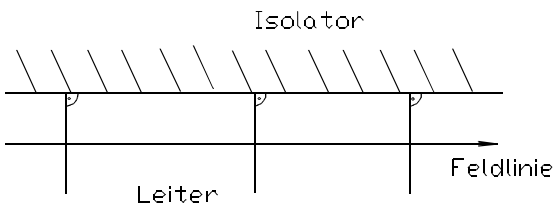
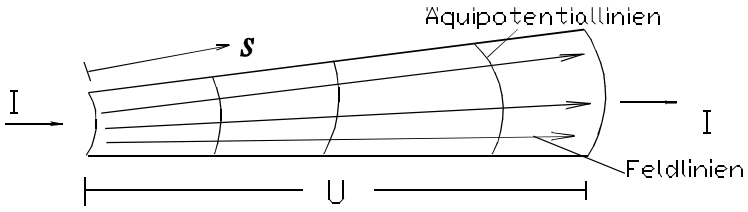


Bild EG78E
$E_1 \approx 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}$ weil $\varkappa_1 >> \varkappa_2$

7.9. Berechnung des elektrischen Widerstandes

7.9.1. Analytische Methode

Voraussetzung: Aus geometrischen Überlegungen (u.a. Symmetriebedingungen) ist der Verlauf der Strombahnen (Feldlinien) und damit der vom Strom durchflossenen Querschnittsfläche (senkrecht zum Strom, Potentiallinien) bekannt.



$$R = \rho * \frac{l}{A}$$

$$dR = \rho * \frac{ds}{A(s)}$$

$$R = \rho \int \frac{1}{A(s)} * ds$$

Bild EG791A

7.9.2. Grafische Methode

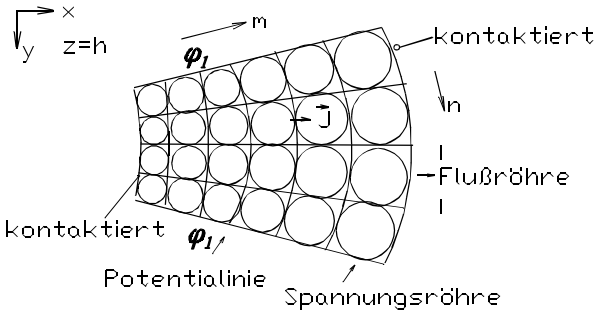


Bild EG792A

Der elektrische Widerstand der Anordnung nach Bild EG792A soll bestimmt werden. Die Anordnung hat aus der Blattebene heraus die Höhe z = h. Die Anordnung wird in lauter kleine Quadrate eingeteilt. Danach ergeben sich Potential und Feldlinien. Für das obere Beispiel ergeben sich:

n = 4	Flußröhren
m = 6	Spannungsröhren

Der Widerstand R' eines Teilquadrates der oberen Anordnung mit der Seitenlänge a wird berechnet:

$$R' = \rho * \frac{l}{A} \qquad l = a \qquad A = a*h$$

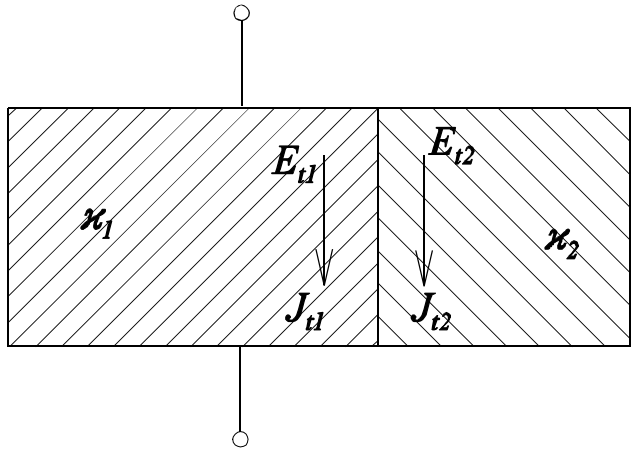
$$R' = \rho * \frac{a}{a*h} = \frac{\rho}{h}$$

Bei der oberen Anordnung sind m Widerstände R' in Reihe geschaltet und n Widerstände R' parallel. Damit kann der Gesamtwiderstand R bestimmt werden:

n - Widerstände R' parallel
m - Widerstände R' in Reihe

$$R_{ges} = R = R' \frac{m}{n} \qquad R = \rho \frac{m}{n} * \frac{1}{h}$$

7.10. Verhalten an Grenzflächen

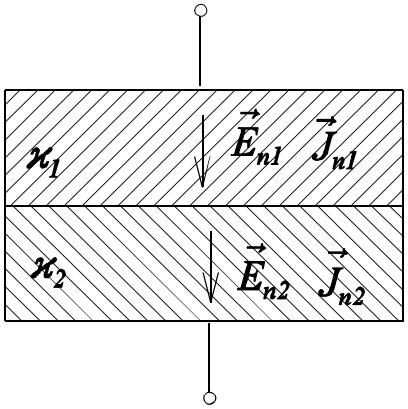


$E_{t1} = E_{t2}$

$$\frac{J_{t1}}{\kappa_1} = \frac{J_{t2}}{\kappa_2}$$

$$\frac{J_{t1}}{J_{t2}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

Bild EG710A

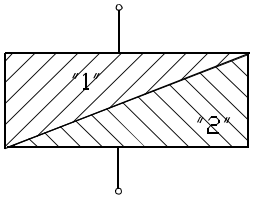


$J_{n1} = J_{n2}$

$\kappa_1 * E_{n1} = \kappa_2 * E_{n2}$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

Bild EG710B



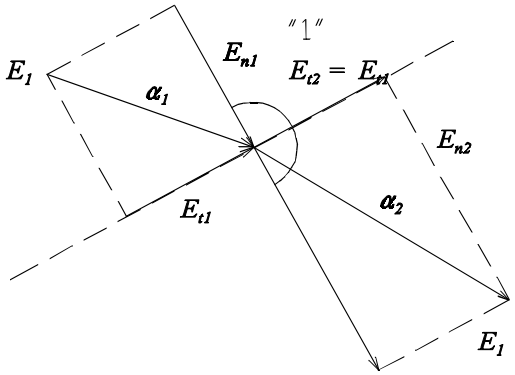


Bild EG710C

$E_{t1} = E_{t2}$ $\qquad \tan(\alpha_1) = \frac{E_{t1}}{E_{n1}}$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \qquad \tan(\alpha_2) = \frac{E_{t2}}{E_{n2}}$$

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\frac{E_{t1}}{E_{n1}}}{\frac{E_{t2}}{E_{n2}}} = \frac{E_{t1}}{E_{t2}} * \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = 1 * \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \qquad \frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

8. Das elektrostatische Feld

8.1. Ursache des elektrostatischen Feldes

elektrische Strömungsfeld:	anschaulich verständlich
Elektrostatische Feld:	schon abstrakter
Magnetische Feld:	am schwierigsten

Wie sind die meisten der Naturgesetze gefunden worden? Antwort: Durch Versuche und Experimente. Das wollen wir hier nun hypothetisch durchführen.

Versuch 1: Luft oder Vakuum zwischen zwei Platten und Spannung anlegen

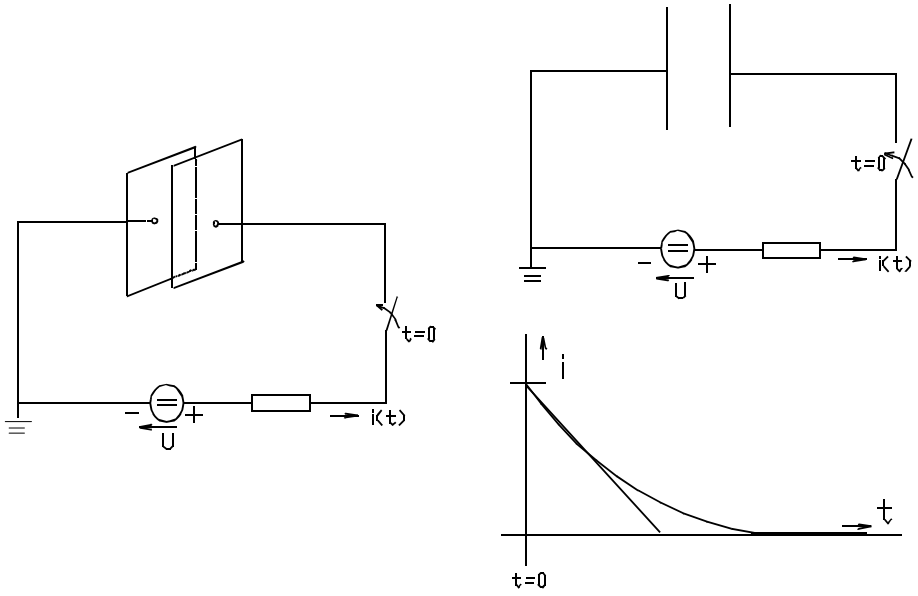
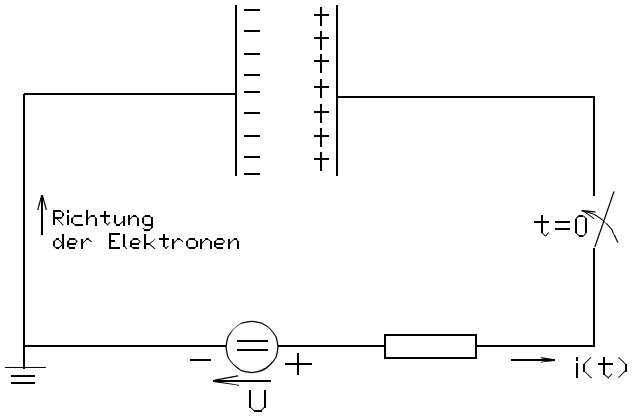


Bild EG81A

zu Versuch 1:

Nach dem Einschalten ist ein Strom festzustellen, der abnimmt und nach einiger Zeit zu Null wird. Da aber Luft oder Vakuum ein Nichtleiter ist, kann kein Stromfluß zwischen den beiden Elektroden stattgefunden haben. Was ist nun aber Strom? Die Antwort aus den ersten Semester lautet: Strom ist die resultiere der Bewegung von Ladungen. Zweite Frage: Wenn Ladungen bewegt wurden, wo befinden sich nun diese Ladungen? Antwort: Die Ladungen wandern zu den Elektroden (Platten) im elektrostatischen Feld.



negative Ladungen:	Elektronen
positive Ladungen:	Elektronenmangel

Bild EG81B

Versuch 2: Messung des Potentials

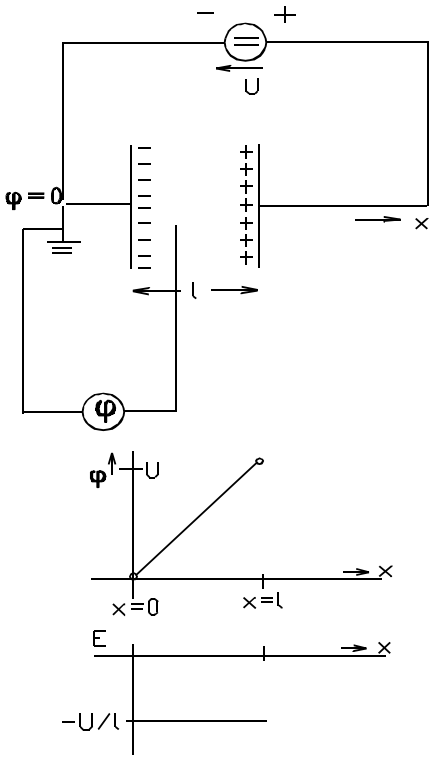


Bild EG81C

Zwischen den Platten kann ein konstanter Anstieg des Potentials festgestellt werden

=> konstante Feldstärke, weil homogenes Feld

Abklemmen der Spannungsquelle => Feldstärke (E) bleibt erhalten

Durch den oberen Versuch erfolgten die oberen zwei Feststellungen:
- Ladungsverschiebung zu den Platten
- Feldstärke in Elektrostatischen Feld.

Satz: **Die Ursache des elektrostatischen Feldes sind Ladungen, die die Feldgröße $\vec{E}$ der Feldstärke als Wirkung haben.**

8.2. Kraft auf eine Ladung

Wiederholung aus dem 1. Semester

Versuch 3: Messung der Kraft auf eine Ladung im homogenen Feld

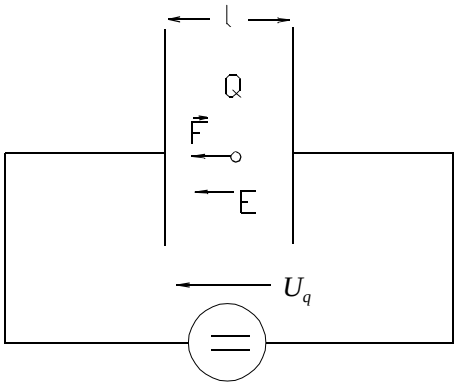


Bild EG82A

U_q	l	E	Q	F
U_{q0}	l_0	E_0	Q_0	F_0
$2U_{q0}$ $3U_{q02}$	l_0 l_0	$2E_0$ $3E_0$	Q_0 Q_0	$2F_0$ $3F_0$
U_{q0} U_{q0}	$2l_0$ $3l_0$	$E_0/2$ $E_0/3$	Q_0 Q_0	$F_0/2$ $F_0/3$
U_{q0} U_{q0}	l_0 l_0	E_0 E_0	$2Q_0$ $3Q_0$	$2F_0$ $3F_0$

Fazit $F \sim Q*E$ $F = c*Q*E$

eine Proportionalitätskonstante ist in der Elektrotechnik frei wählbar hier

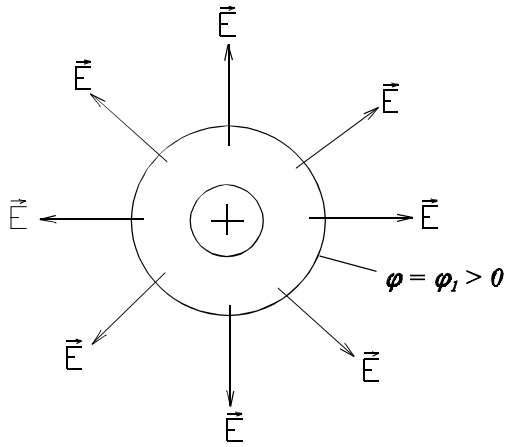
$c = 1$

$F = Q*E$

$$\vec{F} = Q * \vec{E}$$

8.3. Zusammenwirken zweier Ladungen

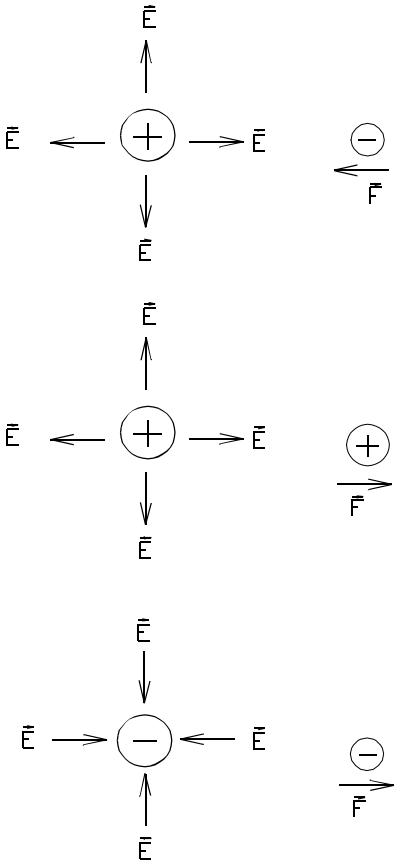
a) Feld einer Einzelladung



Eine Einzelladung hat ein radial nach außen gerichtetes Feld: $\vec{F} = q * \vec{E}$

Bild EG83A

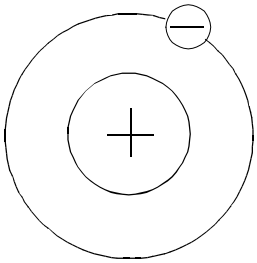
Eine positive Ladung erfährt eine Kraft in Richtung der Feldstärke, eine negative Ladung entgegengesetzt zur Feldstärke



ungleiche Ladung ziehen sich an gleichnamige Ladungen stoßen sich ab

Bild EG83B

Klassisches Beispiel:



Atom: Ausgleich von Zentripetal- und Zentrifugalkraft

Bild EG83C

8.4. Ladungsarten

a) Das Wesen der Ladung sind negative Elektronen und positive Kernladungen. Die als **Punktladungen** angenommen werden:

$$[Q] = [As] = C$$

Je nach geometrischer Anordnung einzelner Ladungen handelt es sich um Punkt-, Linien-, Flächen- oder Raumladungen.

b) Linienladung λ

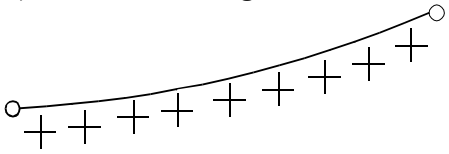


Bild EG84A

$$[\lambda] = \frac{As}{m} = \frac{C}{m} \qquad Q = \int\limits_{(s=weg)} \lambda(Ort)\, ds$$

c) **Flächenladung σ**

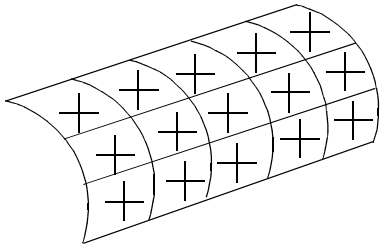


Bild EG84B

$$[\sigma] = \frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2} \qquad Q = \int\int\limits_{(A)} \sigma(Ort)\, dA$$

d) **Volumen-, Raumlandung ρ**

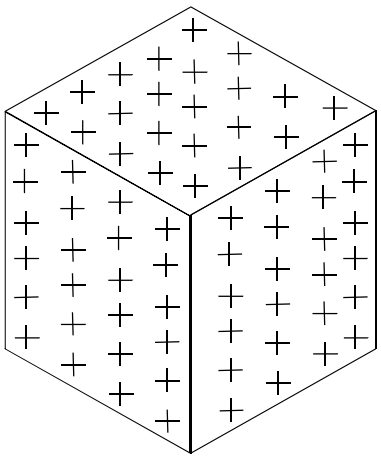


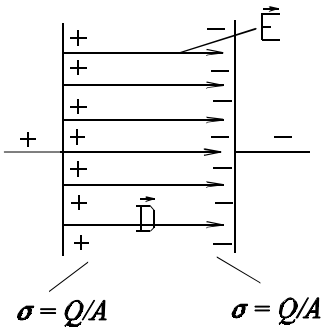
Bild EG84C

$$[\rho] = \frac{As}{m^3} = \frac{C}{m^3}$$

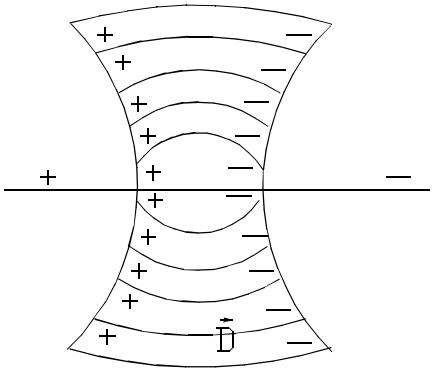
$$Q = \int\int\int\limits_{(V)} \rho(Ort)\, dV$$

8.5. Verschiebungsfluß und Verschiebungsflußdichte

homogenes Feld



inhomogenes Feld



$$\vec{D} = \frac{dQ}{dA_{\perp}}$$

Bild EG85A

$\vec{D}$ - Verschiebungsflußdichte

$$[\vec{D}] = [\sigma] = \frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2}$$

Die Verschiebungsflußdichte ist die gedachte Flächenladungsdichte verschoben in der Flußröhre ($\vec{E}$ - Feldlinien). $\vec{D}$ und $\vec{E}$ haben gleiche Richtung (analog zu $\vec{J} = \sigma * \vec{E}$).

$$[D] = [\sigma] = \frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2}$$

Ψ - Verschiebungsfluß

Das ist die Flächenladung verschoben in Richtung einer Flußröhre ($\vec{E}$ - Feldlinien)

$\Psi = D*A$ homogen

$\Psi = \int_{(A)} \vec{D} * d\vec{A}$ inhomogen

8.6. Zusammenhang zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$

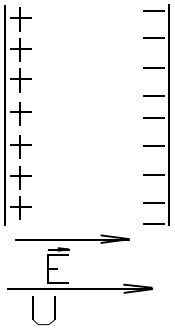


Bild EG86A

Wieviel Ladungen fließen nun auf die Platten pro Flächeneinheit. Ursache ist Feldstärke $\vec{E}$ diese verursacht Flächenladung => $\vec{D} = f(\vec{E})$

Versuch 4:

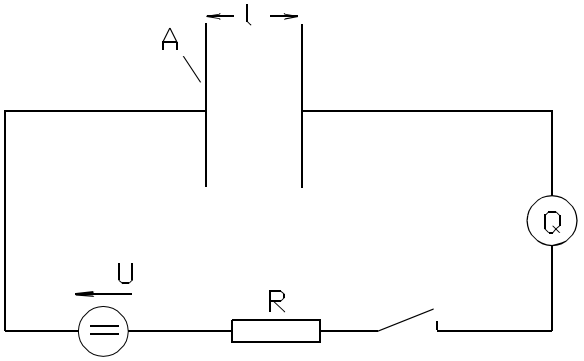


Bild EG86B

l	A	U	Q	E = U/l	D = Q/A	D/E
l_1	A_1	U_1	Q_1	$U_1/l_1 = E_1$	$D_1 = Q_1/A_1$	D_1/E_1
$2l_1$	A_1	U_1	$Q_1/2$	$U_1/2l_1 = E_1/2$	$(Q_1/2)/A_1 = D_1/2$	D_1/E_1
$3l_1$	A_1	U_1	$Q_1/3$	$U_1/3l_1 = E_1/3$	$(Q_1/3)/A_1 = D_1/3$	D_1/E_1
l_1	$2A_1$	U_1	$2Q_1$	$U_1/l_1 = E_1$	$2Q_1/2A_1 = D_1$	D_1/E_1
l_1	$3A_1$	U_1	$3Q_1$	$U_1/l_1 = E_1$	$3Q_1/3A_1 = D_1$	D_1/E_1
l_1	A_1	$2U_1$	$2Q_1$	$2U_1/l_1 = 2E_1$	$2Q_1/2A_1 = 2D_1$	D_1/E_1
l_1	A_1	$3U_1$	$3Q_1$	$3U_1/l_1 = 3E_1$	$3Q_1/3A_1 = 3D_1$	D_1/E_1
Vorgabe			Messen	berechnet		

Fazit aus Versuch 4:

D ~ E D = const*E

Einführung der Dielektrizitätskonstanten: D = ϵ*E $\vec{D} = \epsilon * \vec{E}$

$$[\epsilon] = \frac{[D]}{[E]} = \frac{\frac{As}{m^2}}{\frac{V}{m}} = \frac{As}{Vm}$$

Dielektrizitätskonstanten ϵ ist vom Material abhängig. Für das Vakuum gilt:

$$\epsilon_{Vakuum} = \epsilon_0 = 8.854 * 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Versuch 5

A] Ein Kondensator mit zwei Platten in Luft wird aufgeladen und die Spannungsquelle wieder abgeschaltet. Ergebnis: Die Spannung bleibt auf dem Wert der Quellspannung.

B] In das Feld zwischen den Platten des Kondensators wird Materie (Nichtleiter) gebracht. Ergebnis: Die Spannung wird verringert.

C] Die Materie wird wieder zwischen den Kondensatorplatten entfernt. Ergebnis: Die Spannung steigt wieder auf den Wert der (ursprünglichen) Quellspannung.

Fazit: Die Materie hat eine Wirkung. Dadurch wird die Feldstärke verringert. Wie kann die Feldstärke verringert werden? Antwort: Durch Überlagerung einer Polarisationsfeldstärke, ausgehend von der Materie, siehe Bild EG86C.

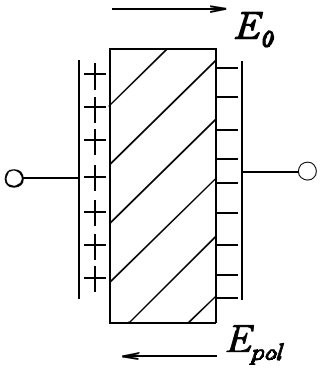


Bild EG86C

$E_{res} = E_0 - E_{pol}$

$D = D_0$

$$\epsilon = \frac{D}{E_{res}} = \frac{D_0}{E_0 - E_{pol}}$$

$$\epsilon = \frac{D_0}{E_0} * \frac{1}{1 - E_{pol}/E_0}$$

$\epsilon = \epsilon_0 * \epsilon_r$

$$\epsilon_0 = \frac{D_0}{E_0} \qquad \epsilon_r = \frac{1}{1 - E_{pol}/E_0} \qquad > 1$$

$\epsilon_0 = 8.854 * 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ - Dielektrizitätskonstante des Vakuums

ϵ_r - relative Dielektrizitätskonstante

ϵ - (absolute) Dielektrizitätskonstante

Verhalten von Materie bei Anlegen einer elektrischen Feldstärke

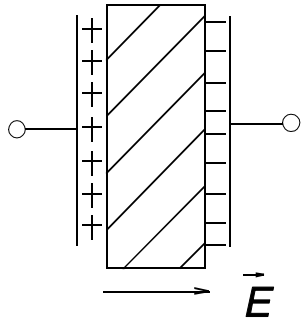


Bild EG86D

Aufbau der Materie

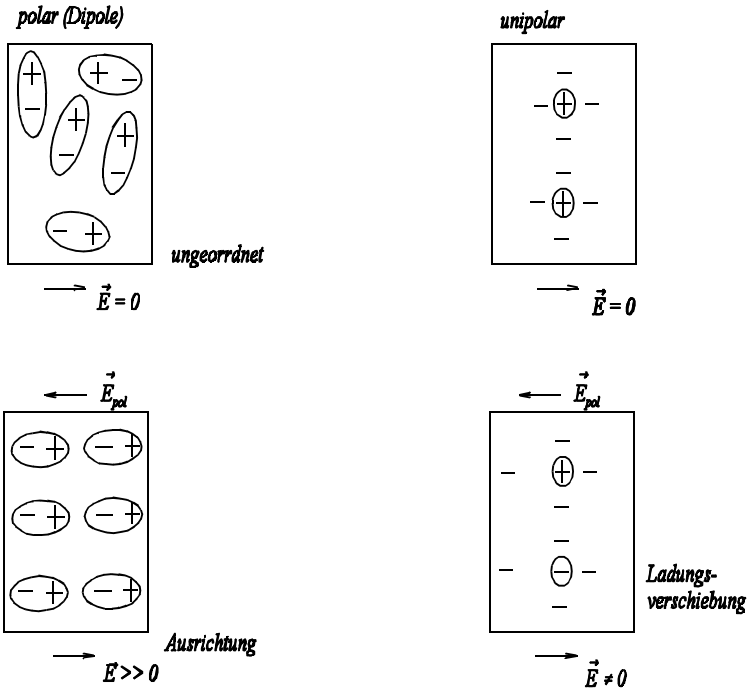


Bild EG86E

Permitivität

$\epsilon = \epsilon_0 * \epsilon_r = f(E)$

Einige ϵ, - Werte

Vakuum	1.0000000
Luft	1.00059
Mineralöl	2.2...2.5
Chlophen	4...5
Ölpapier	3.5...4.5
Hartpapier	4.5...5.5
Spezialkeramik	bis 4000
Glas	5...7
Quarzglas	
50 Hz	3.5...4.2
800 Hz	4.2
100 kHz	4.4
Wasser	80
Eis (-20°C)	16

8.7. Der Begriff der Kapazität

Aufgabe: Welche Ladungsmenge ist auf den Platten im elektorstatischen Feld vorhanden.

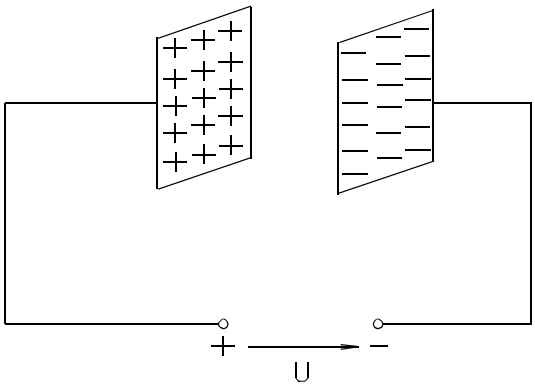


Bild EG87A

Q = D*A

Q = ϵ*E*A

$$Q = \epsilon * \frac{U}{l} * A$$

$$Q = \epsilon_0 * \epsilon_r * \frac{A}{l} * U$$

Q = (Konstante*geometrische Größe)*U

Q = C*U

$$C = \epsilon_0 * \epsilon_r * \frac{A}{l}$$ Kapazität eines Plattenkondensators

$Q = \int i dt$

$\int i_C dt = C * u_C$ $\qquad C * \frac{du_C}{dt} = i_C$

$$i_C = C * \frac{du_C}{dt}$$

8.8. Schaltung von Kondensatoren

a) Parallelschaltung

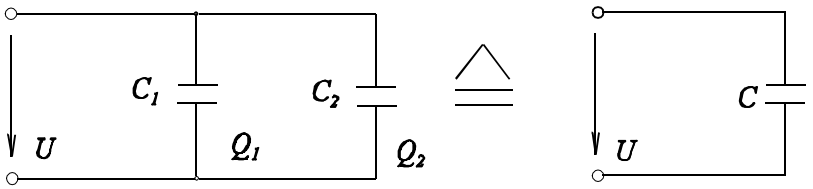


Bild EG88A

$Q_1 = C_1 * U$ $Q_2 = C_2 * U$

$Q = Q_1 + Q_2$

$Q = C_1 * U + C_2 * U$

$Q = (C_1 + C_2) * U$

$Q = C * U$

$$C = C_1 + C_2$$

Bei der Parallelschaltung addieren sich die Kapazitäten

b) Reihenschaltung

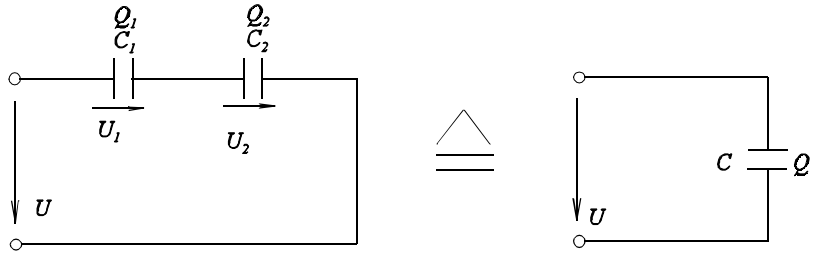


Bild EG88B

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$Q = U * \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = U * C$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

8.9. Berechnung von Kondensatoren

8.9.1. Plattenkondensator

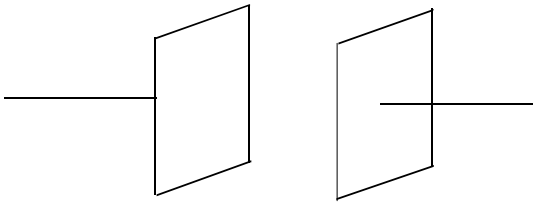


Bild EG891A

$$C = \epsilon * \frac{A}{l}$$

aus Kap. 8.7

8.9.2. Analytische Kapazitäts-Berechnung

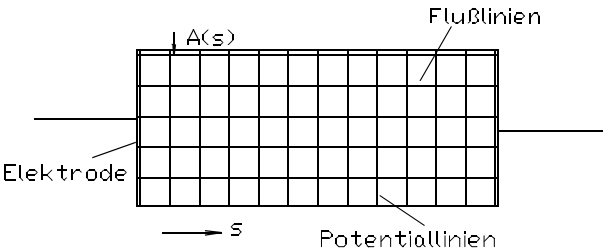


Bild EG892A

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon} * \frac{ds}{A(s)}$$

$$C = \epsilon * \frac{1}{\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{A(s)}}$$

8.9.3. Konzentrischer Zylinder-Kondensator

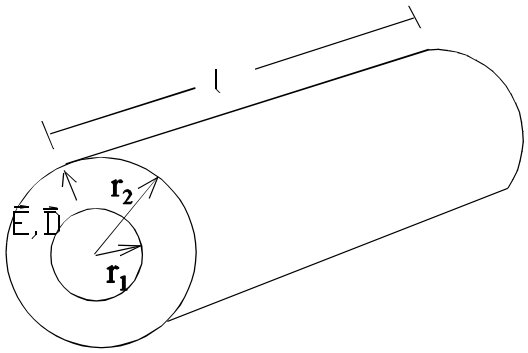


Bild EG893A

gesucht: C

a) Formel nach 8.9.2 anwenden

ds = dr A(s) = A(r) = l*2π*r

$$C = \epsilon * \frac{1}{\frac{1}{2\pi l} \int_{r=r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr}$$

$$C = \frac{\epsilon * 2\pi * l}{\ln(r_2/r_1)}$$

b) Ansatz eines konstanten Verschiebungsflusses (Ladung)

$\psi_1 = \psi_2$ - Verschiebungsfluß konstant

$D(r_1) = D_1$

$\psi = D_1 * A_1 = D_1 * 2\pi * r_1 * l$

$$D(r) = \frac{\psi}{A(r)} = \frac{D_1 * 2\pi * r_1 * l}{2\pi * r * l} = D_1 * \frac{r_1}{r}$$

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon} * D(r) = \frac{1}{\epsilon} * D_1 * \frac{r_1}{r}$$

$grad(\varphi) = -\vec{E}$ hier nur r- Komponente

$\frac{d\varphi}{dr^*} = -E(r^*)$ $d\varphi = -E(r^*)dr^*$

$$\int_1^2 d\varphi = -\int_{r^*=r_1}^{r_2} E(r^*)dr^* = \int_{r^*=r_2}^{r_1} E(r^*) * dr^*$$

$$\varphi(r) - \varphi_1 = \int_{r^*=r}^{r_1} \frac{D_1 * r_1}{\epsilon} \frac{dr}{r} = \frac{D_1 * r_1}{\epsilon} \ln\left(\frac{r_1}{r}\right)$$

$$\varphi(r) = \varphi_1 - \frac{D_1 * r_1}{\epsilon} * \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

Randbedingungen: $\varphi(r_2) = \varphi_2 = 0$ $\varphi(r_1) = \varphi_1 = U$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{D_1 * r_1}{\epsilon} * \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = U$$

$$D_1 = \frac{\epsilon * U}{r_1 * \ln(r_2/r_1)}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{D_1 * A_1}{U} = \frac{\epsilon * U}{r_1 * \ln(r_2/r_1)} * (2\pi * r_1 * l) * \frac{1}{U}$$

$$C = \frac{2\pi * l * \epsilon}{\ln(r_2/r_1)}$$

8.9.4. Konzentrischer Kugelkondensator

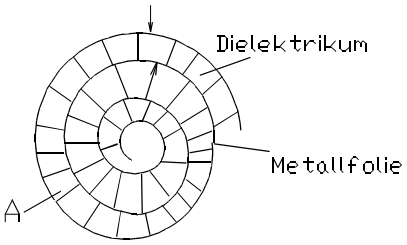
ds = dr

$A(r) = 4\pi * r^2$

$$C = \frac{\epsilon}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{A(r)}} = \frac{\epsilon}{\frac{1}{4\pi}\int_{r=r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr} = \frac{4\pi\epsilon}{-\frac{1}{r}\Big|_{r=r_1}^{r_2}}$$

$$C = 4\pi * \epsilon \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

8.9.5. Wickelkondensator

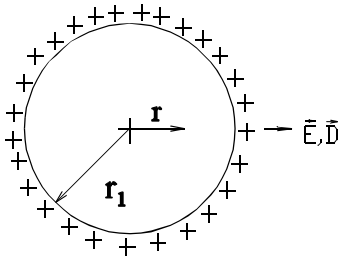


$$C = 2\epsilon * \frac{A}{l}$$

Bild EG895A

8.9.6. Feld und Kapazität einer Doppelleitung

8.9.6.1. Feld einer Einzelleitung



gegeben: Leitung der Länge l (in Zeichenebene)
r_1 - Radius der Leitung
$Q_1 = Q$ Ladung auf der Leitung

Bild EG8961A

$$D(r) = \frac{Q}{A(r)} = \frac{Q}{l * 2\pi * r}$$

$$E(r) = \frac{D(r)}{\epsilon} = \frac{Q}{2\pi * \epsilon * l * r}$$

$d\varphi = -Edr$ $\varphi = -\int Edr + C_1$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\epsilon l}\int\left(-\frac{1}{r}\right)dr + C_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon l}[-\ln(r) + C_1] = \frac{Q}{2\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \qquad C_1 = \ln(r_0)$$

Damit ist das Feld einer Einzelleitung bestimmt

für $r = r_0$ => $\varphi = 0$

8.9.6.2. Feld einer Doppelleitung auf der Verbindungslinie

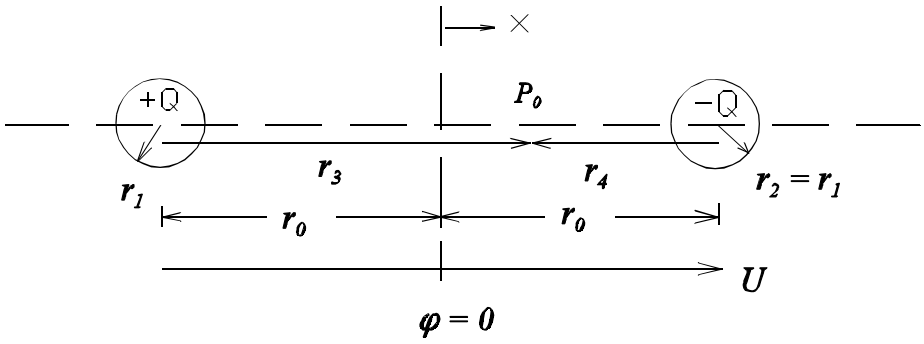


Bild EG8962A

Die beiden Felder der zwei oberen Einzelladungen sollen mit Hilfe der Formel aus dem letzten Abschnitt überlagert werden.

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Für die einzelnen Größen der oberen Formel gilt:

$Q_1 = +Q$ $\qquad$ $Q_2 = -Q$

$r = r_3 = r_0 + x$ $\qquad$ $r = r_4 = r_0 - x$

$$\varphi_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{r_0}{r_0+x}\right) \qquad \varphi_2 = \frac{-Q}{2\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{r_0}{r_0-x}\right)$$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \frac{Q}{2\pi\epsilon l}\left[\ln\left(\frac{r_0}{r_0+x}\right) - \ln\left(\frac{r_0}{r_0-x}\right)\right]$$

$$\varphi(x) = \frac{Q}{2\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{r_0-x}{r_0+x}\right)$$

$U = \varphi(x=-r_0+r_1) - \varphi(x=r_0-r_1)$

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon l}\left[\ln\left(\frac{r_0+r_0-r_1}{r_0-r_0+r_1}\right) - \ln\left(\frac{r_0-r_0+r_1}{r_0+r-r_1}\right)\right]$$

$$U = \frac{Q}{\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{2r_0-r_1}{r_1}\right) \qquad \text{(A)}$$

$$Q = \frac{U\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{2r_0-r_1}{r_1}\right)} \qquad \text{(B)}$$

$$\varphi(x) = \frac{\frac{U\pi\epsilon l}{\ln[(2r_0-r_1)/r_1]}}{2\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{r_0-x}{r_0+x}\right)$$

$$\varphi(x) = \frac{U}{2} * \frac{\ln\left(\frac{r_0+x}{r_0-x}\right)}{\ln\left(\frac{2r_0-r_1}{r_1}\right)}$$

8.9.6.3. Kapazität einer Doppelleitung

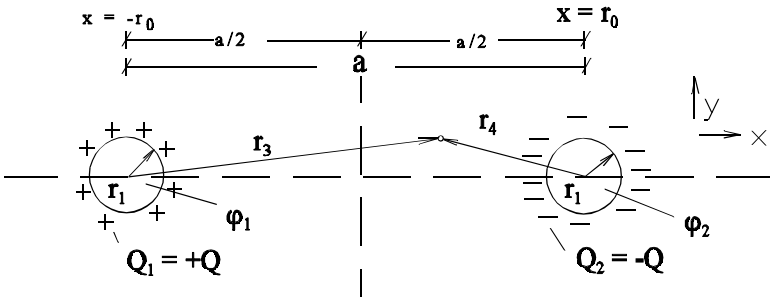
Die Gleichung (A) des letzten Abschnitts läßt sich auswerten:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{2r_0 - r_1}{r_1}\right)}$$

$2r_0 = a$ - Abstand der Leiter
r_1 - Radius der Leiter

$$C = \frac{\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{a - r_1}{r_1}\right)}$$

8.9.6.4. Potential der Doppelleitung



$r_0 = \frac{a}{2}$

Bild EG8964A

Erweiterung der Theorie aus Kap. 8.9.6.2:

$r_3^2 = (r_0 + x)^2 + y^2$ $\qquad$ $r_4^2 = (x - r_0)^2 + y^2$

$\varphi_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right)$ $\qquad$ $\varphi_2 = \frac{-Q}{2\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{r_0}{r_4}\right)$

$$\varphi(r_3,r_4) = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon l}\left[\ln\left(\frac{r_0}{r_3}\right) - \ln\left(\frac{r_0}{r_4}\right)\right]$$

$$\varphi(x,y) = \frac{Q}{2\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{r_4^2}{r_3^2}\right)$$

Q => (B) aus Kap. 8.9.6.3

$$\varphi(x,y) = \frac{U\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{a-r_1}{r_1}\right)} * \frac{1}{4\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{r_4^2}{r_3^2}\right)$$

$$\varphi(x,y) = \frac{U}{4}\frac{1}{\ln\left(\frac{a-r_1}{r_1}\right)} * \ln\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}$$

φ = const => $\frac{r_4}{r_3} = const$

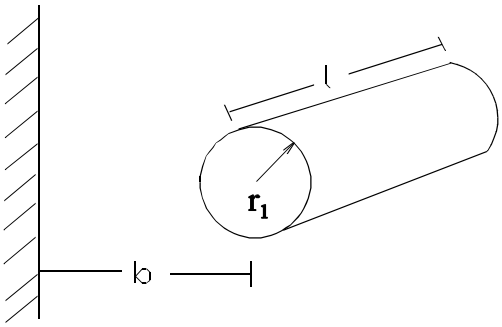
$$\frac{r_4^2}{r_3^2} = const = \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x + \frac{a}{2}\right) + y^2}$$

Die obere Gleichung ergibt Kreise unterschiedlicher Durchmesser und Mittelpunkte. Diese werden Appolonische Kreise genannt.

8.9.7. Kapazität einer Leitung gegen Erde

Aus Feldsymmetrie => $C_{Erde} = 2C_{Doppelleitung}$

$$C = \frac{\epsilon * l * 2\pi}{\ln\left(\frac{2b - r_1}{r_1}\right)}$$



$$b = \frac{a}{2}$$

a = 2b

Bild EG897A

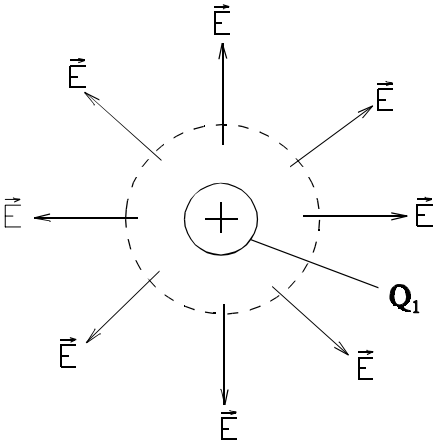
Aufgabe 8.1, 8.2 und 8.3 rechnen

8.10. Kraft zwischen zwei Ladungen

Schon diskutiert von der Richtung her

- gleiche Ladungen stoßen sich ab
- ungleiche Ladungen ziehen sich an

Wie groß ist der Wert der Kraft?



Q_1 - Punktladung
Feld einer Punktladung

Bild EG810A

$$D_1 = \frac{Q_1}{A_1(r)} = \frac{Q_1}{4\pi * r^2}$$

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon} = \frac{Q_1}{4\pi * \epsilon * r^2}$$

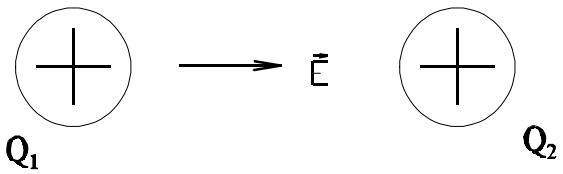


Bild EG810B

$$\vec{F}_r = Q_2 * \vec{E}_1 = \frac{Q_2 * Q_1}{4\pi * \epsilon * r_{12}^2} * \vec{e}_r$$

$$F = \frac{Q_1 * Q_2}{4\pi * \epsilon * r^2}$$

Aufgabe 8.4 und 8.5 rechnen

8.11. Influenz, Faradayischer Käfig

Versuch 6:

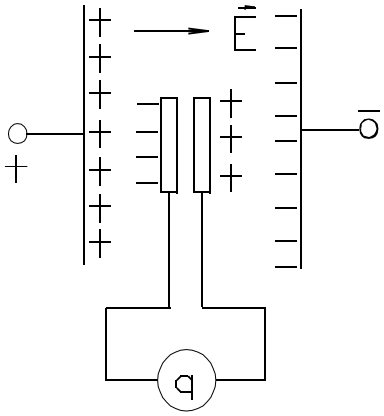


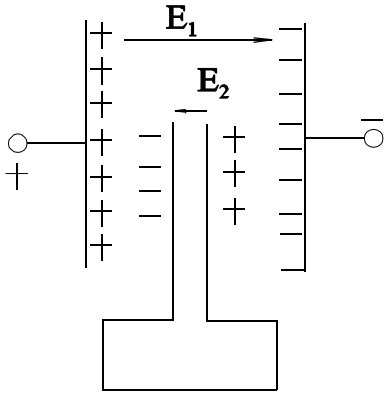
Bild EG811A

Zwei Platten werden in ein Feld gebracht. Was passiert? Es erfolgt aufgrund der Feldstärke eine Ladungsausrichtung

+ in Richtung E
- entgegengesetzt E

Effekt bedeutet es werden Ladungen influenziert man spricht von Influenz.

Größe der influenzierten Ladung: $Q_{inf} = D*A = \psi$



$E_2 = -E_1$
Überlagerung hebt sich auf.

=> Feldfreier Raum

Faradayischer Käfig

Bild EG811B

8.12. Energie des elektrischen Feldes

Platten-Kondensator:

$W = \int u*i*dt$ => $i*dt = dq$

$W = \int u*dq = u*c*du$ $q = c*u$ $dq = c*du$

$$W = \frac{1}{2}*c*u^2$$

Energie eines geladenen Kondensators

Energiedichte des elektrostatischen Feldes

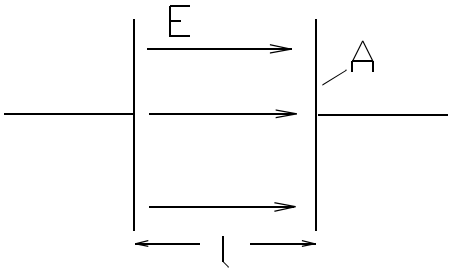


Bild EG812A

$W = \frac{1}{2}CU^2$ $C = \frac{\epsilon*A}{l}$ U = E*l A*l = V

$$W = \frac{1}{2}*\frac{\epsilon*A}{l}*(E*l)^2 = \frac{1}{2}*\epsilon*E*E*A*l$$

$$W = \frac{1}{2}*\epsilon*E^2*V = \frac{1}{2}*E*D*V = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\epsilon}*V$$

homogenes Feld

allgemein

$$dW = \frac{1}{2}*\epsilon*E^2*dV = \frac{1}{2}*\vec{E}*\vec{D}*dV = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\epsilon}*dV$$ inhomogenes Feld

8.13. Entladen eines Kondensators

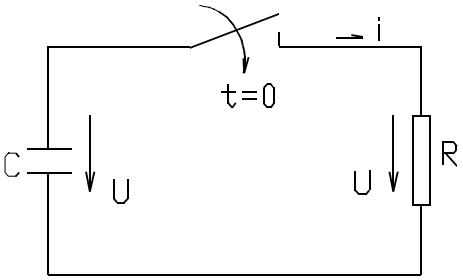


Bild EG813A

$$i = \frac{u}{R} = -C*\frac{du_C}{dt}$$

$$u_C = -R*i = -R*C*\frac{du_C}{dt}$$

Ansatz: $u = u_0 * e^{-t/T}$ $\qquad \frac{du}{dt} = -\frac{1}{T}*u_0*e^{-t/T}$

$$u_0*e^{-t/T} = -R*C*\left(-\frac{1}{T}*u_0*e^{-t/T}\right)$$

T = R*C Zeitkonstante

$u = u_0 * e^{-t/T}$

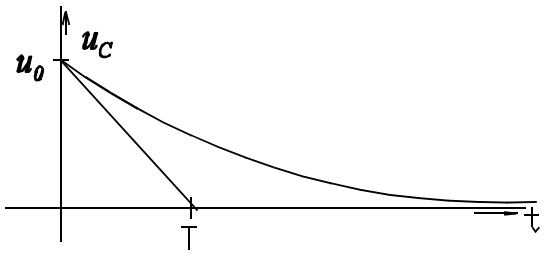


Bild EG813B

Zweite Möglichkeit der Lösung:

$$u_C = -R*C*\frac{du_C}{dt}$$

$$\int dt = \int -R*C*\frac{du_C}{u}$$

$$t - t_0 = -R*C*\ln\frac{u}{u_0}$$

$$u = u_0*e^{-\frac{t-t_0}{RC}}$$

8.14. Verluste im elektrostatischen Feld

8.14.1. Isolations-Verluste

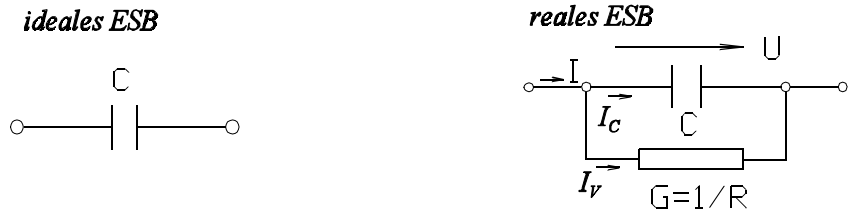


Bild EG8141A

Grund: Isolations Verluste des Dielektrikums

Wie wird der Isolationswiderstand gemessen? Kondensator aufladen und Entladezeitkonstante messen.

$U_C = U_0(t=0)*e^{-t/R*C}$

R*C = ?

$$R = \rho * \frac{l}{A} \qquad C = \epsilon * \frac{A}{l}$$

$$R*C = \rho * \frac{l}{A} * \epsilon * \frac{A}{l} = \rho * \epsilon = T \qquad \Rightarrow \qquad R = T/C$$

$T = \rho*\epsilon$ $\qquad \rho*\epsilon = R*C$ $\qquad C = \frac{1}{R} * \rho * \epsilon$

$\epsilon = \epsilon_0*\epsilon_r$ $\qquad \epsilon_0 = 8.854 * 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

	ρ[Ωm]	ϵ_r	T[s]	T/min
Mineralöl	10^{14}	2.3	2036	34
Chlopfen	10^{13}	4.5	398	6.6
Ölimp. Papier	10^{16}	3.5	$3.1*10^5$	86 h
Hartpapier	10^{10}	4.5	0.39	

8.14.2. Dielektrische Verluste

Was ist das?

Was war Polarisation?

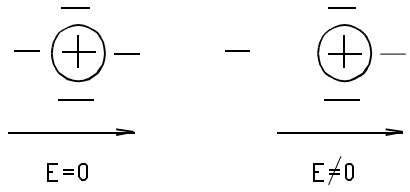


Bild EG8142A

Antwort: Ladungsverschiebung im dielektrischen Feld (F = Q*E).

dW = Q*E*ds => Ladungsverschiebung verbraucht Energie durch irreversible Wärmeumformung. Wann tritt Ladungsverschiebung auf bei Spannungsveränderungen oder bei Wechselstrom. D.h. diese Verluste müssen irgendwie repräsentiert werden. Also durch einen Widerstand der frequenzabhängig ist.

Angabe erfolgt nun üblicherweise nicht durch R oder G sondern durch tan(δ) was ist nun δ

δ - Verlustwinkel

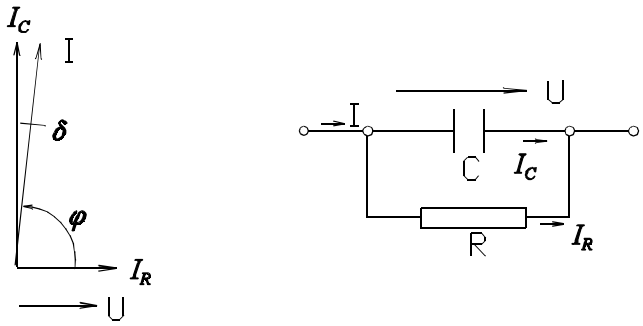


Bild EG8142B

tan(δ) ist üblich als Angabe

tan(δ) - Wert in 10^{-3}

	50 Hz	1 KHz	1 MHz
Hartpapier	4 bis 6	25 bis 100	20 bis 50
Papier impr.	5 bis 10	1.5 bis 10	30 bis 60
Quarz		0.1	0.1
Glimmer	0.3	0.1	0.17
PVC Hart/weich	20..150	15..150	15..100

Warum tan(δ)?

P_V - Verluste im Kondensator

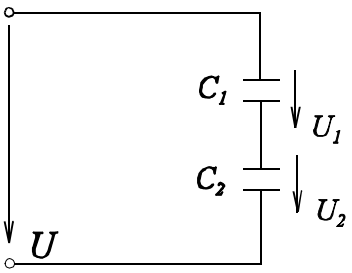
$P_V = U*I_R = U*I_C*\tan(\delta)$ $I_C = U*\omega*C$

$P_V = U^2*\omega*C*\tan(\delta)$

Aufgabe 8.6 und 8.7 rechnen

8.15. Spannungsverteilung an einer Reihenschaltung

a) ideale Kapazität

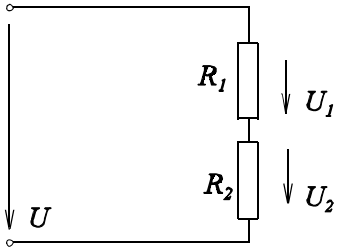


$$Q = U * C_{ges} = U * \frac{C_1 * C_2}{C_1 + C_2}$$

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = U * \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

Bild EG815A

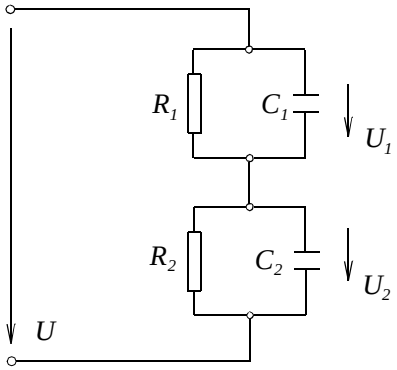
b) Widerstände



$$U_1 = U * \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Bild EG815B

c) reale Kapazität



Nach dem Einschalten => C_i bestimmen U_1, U_2

$t \rightarrow \infty$ => R_i bestimmen U_1, U_2

Bild EG815C

Aufgabe 8.8 und 8.9 rechnen

8.16. Kraft auf Kondensatorplatten

(Elektrodynamisches Meßwerk)

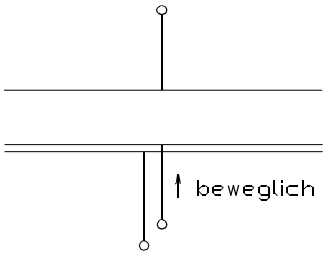


Bild EG816A

dW = F*ds $\qquad F = \frac{dW}{ds}$

$$W = \frac{1}{2} * C * U^2 = \frac{1}{2} \epsilon * \frac{A}{l} * U^2$$

$$\frac{dW}{dl} = -\frac{1}{2} \epsilon * A * U^2 * \frac{1}{l^2}$$

$$F = -\frac{1}{2} \epsilon * A * \frac{U^2}{l^2}$$

$$F = \frac{1}{2} \epsilon * A * E^2$$

Aufgabe 8.10 rechnen

8.17. Verallgemeinert Stromdichte

Stromdichte aufgrund von Ladungsbewegung

allgemein: $i(t) = \frac{dQ}{dt}$

$I = \frac{Q}{t}$ - Gleichstrom

$J = \frac{I}{A} = J(t) = \frac{1}{A}\frac{dQ}{dt}$

Leiter: stationäre Strömung von Elektronen
Dielektrikum: Verschiebung von Ladungen

a) Verschiebungsstromdichte

$J_v = \frac{1}{A} * \frac{dQ}{dt} = \frac{d(Q/A)}{dt} = \frac{dD}{dt} = \dot{D}$

$$\vec{J}_V = \dot{\vec{D}} = \epsilon * \dot{\vec{E}}$$

b) Stromdichte des elektrischen Strömungsfeldes

$\vec{J}_S = \varkappa * \vec{E}$

c) gesamte Stromdichte

$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_v$

$\vec{J} = \varkappa * \vec{E} + \epsilon * \dot{\vec{E}}$

d) Komplexer Ansatz:

$\underline{E} = E * e^{j\omega t}$ $\qquad$ $\dot{\underline{E}} = j\omega E * e^{j\omega t} = j\omega \underline{E}$

$\underline{J} = \varkappa * \underline{E} + \epsilon * j\omega * \underline{E} = (\varkappa + j\omega\epsilon)\underline{E}$

$\underline{\varkappa} = \varkappa + j\omega\epsilon$

8.18. Ohmsches und Kirchhoffsche Gesetze in Elementarform

a) ohmsches Gesetz

$$\vec{J} = \varkappa * \vec{E}$$

b) zweites Kirchoffsdes Gesetz (wenn Wirbelfrei)

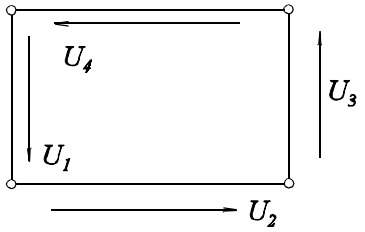


Bild EG818A

$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0$

$\sum U = 0$

$$\oint \vec{E} * d\vec{s} = 0$$

$$rot(\vec{E}) = 0$$

$$\oint_{R.v.A} \vec{E} * d\vec{s} = \iint_{(A)} rot\vec{E} * d\vec{A} = 0$$ (über den Satz von Stokes)

c) erstes Kirchoffsdes Gesetz

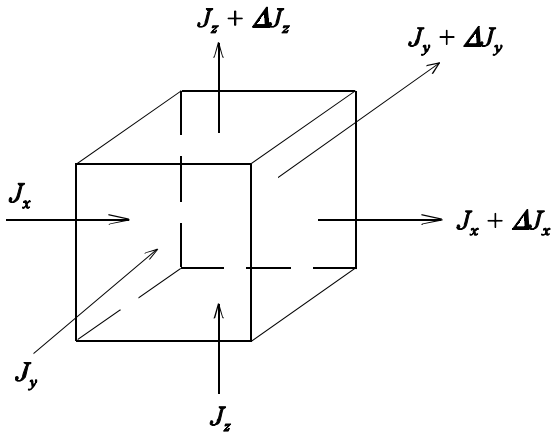


Bild EG818B

$\sum I = 0$

Länge $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

$\Delta I_x + \Delta I_y + \Delta I_z = 0$

$\Delta I_x = \Delta J_x * \Delta A_x = \Delta J_x * \Delta y * \Delta z$

$\Delta J_x * \Delta y * \Delta z + \Delta J_y * \Delta x * \Delta z + \Delta J_z * \Delta x * \Delta y = 0$

$$\frac{\Delta J_x}{\Delta x} + \frac{\Delta J_y}{\Delta y} + \frac{\Delta J_z}{\Delta z} = 0$$

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0$$

$$div\ \vec{J} = 0$$

d) Veränderung der elektrischen Flußdichte

Hier wird ein Volumenelement in kartesischen Koordinaten der Längen dx, dy und dz mit der Raumladung ρ berechnet, siehe Bild EG818C.

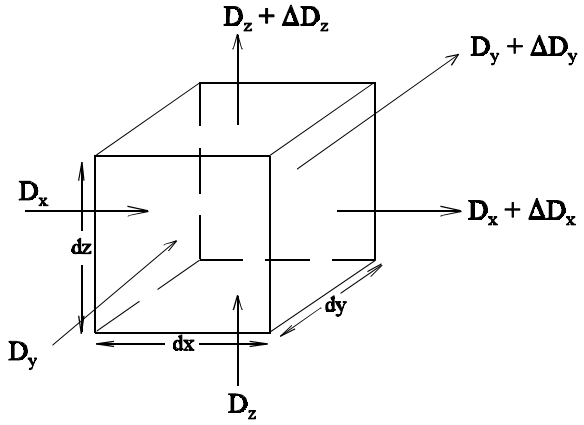


Bild EG818C

$\psi = D*A$

$\Delta\psi = \Delta D_x*A_x + \Delta D_y*A_y + \Delta D_z*A_z = \rho*\Delta V$

$\Delta\psi = \Delta D_x*\Delta y*\Delta z + \Delta D_y*\Delta x*\Delta z + \Delta D_z*\Delta x*\Delta y = \rho*\Delta x*\Delta y*\Delta z$

$$\frac{\Delta D_x}{\Delta x} + \frac{\Delta D_y}{\Delta y} + \frac{\Delta D_z}{\Delta z} = \rho$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

$$div\ \vec{D} = \rho$$

$D = \epsilon*E = \epsilon[-grad(\varphi)]$

$-div\{\epsilon[grad(\varphi)]\} = \rho$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

e) Zusammenfassung

$$\vec{J} = \varkappa*\vec{E} + \epsilon*\dot{\vec{E}}$$

$$rot\ (\vec{E}) = 0 \qquad \int\vec{E}ds = 0$$

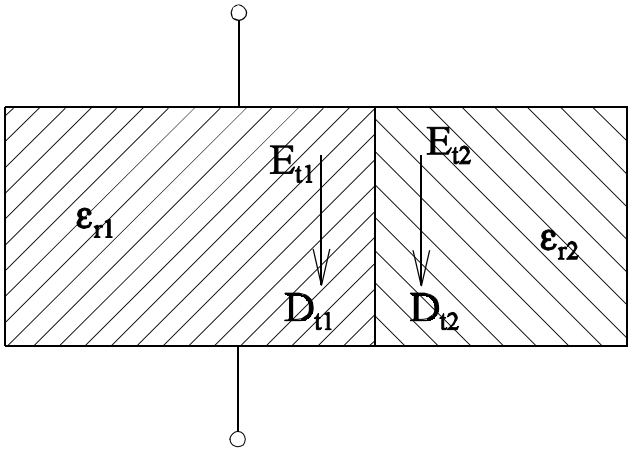
$$div(\vec{J}) = 0$$

$div(D) = \rho$

$$div[grad(\varphi)] = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

8.19. Verhalten an Grenzflächen

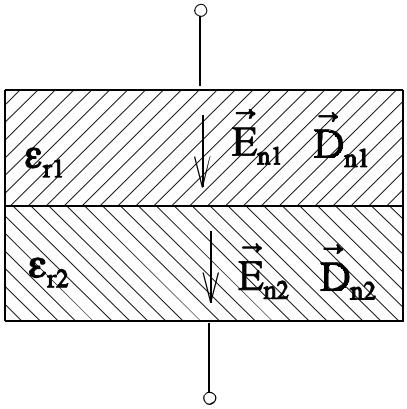


$E_{t1} = E_{t2}$

$$\frac{D_{t1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\epsilon_2}$$

$$\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

Bild EG819A

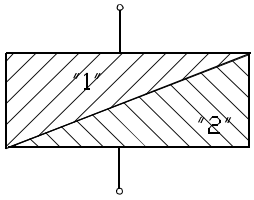


$D_{n1} = D_{n2}$

$\epsilon_1 * E_{n1} = \epsilon_2 * E_{n2}$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$$

Bild EG818B



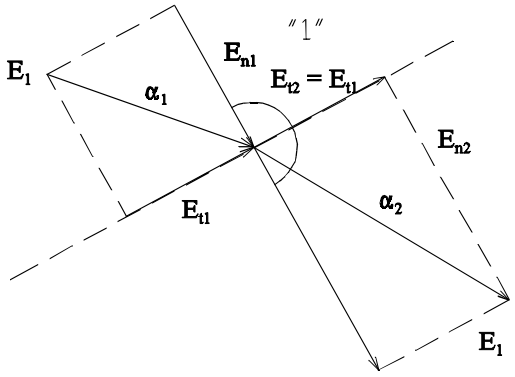


Bild EG818C

$$E_{t1} = E_{t2} \quad \tan(\alpha_1) = \frac{E_{t1}}{E_{n1}}$$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \qquad \tan(\alpha_2) = \frac{E_{t2}}{E_{n2}}$$

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\frac{E_{t1}}{E_{n1}}}{\frac{E_{t2}}{E_{n2}}} = \frac{E_{t1}}{E_{t2}} * \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = 1 * \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \qquad \frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

Anhang

Aufgaben

Aufgabe 6.2.1. (einfach)
Man skizziere den Zeitverlauf der folgenden harmonischen Funktionen.

a) $u(t) = 100V*\cos(628s^{-1}*t + 30^\circ)$ b) $i(t) = 10A*\cos(314s^{-1}*t - 60^\circ)$
c) $u(t) = 14.1V*\cos(503s^{-1}*t - 75^\circ)$ d) $i(t) = 14.1A*\cos(3140s^{-1}*t + 60^\circ)$

Wie groß ist der Maximalwert, die Periodendauer, die Kreisfrequenz und die Frequenz der oberen Zeitfunktion. Die Werte $\hat{y}$, ω und φ der allgemeinen Zeitfunktion $y(t) = \hat{y}*\cos(\omega t+\varphi)$ sind anzugeben.

Aufgabe 6.2.2
Gegeben ist der rotierende Scheitelwertzeiger $\underline{u}(t)$. Man berechne den ruhenden Scheitelwertzeiger $\underline{\hat{u}}$, den Effektivwertzeiger $\underline{U}$ und den Zeitverlauf u(t). Man skizziere Effektivwertzeiger und Zeitverlauf.

a) $\underline{u}(t) = 141V*e^{j(\omega t+45^\circ)}$ b) $\underline{u}(t) = 100V*e^{j(\omega t-45^\circ)}$
c) $\underline{u}(t) = 28.2V/\underline{\omega t+30^\circ}$ d) $\underline{u}(t) = 141V/\underline{\omega t-60^\circ}$

Aufgabe 6.2.3
Gegeben ist der ruhende Scheitelwertzeiger $\underline{\hat{i}}$. Zu berechnen sind der rotierende Scheitelwertzeiger $\underline{i}(t)$, Effektivwertzeiger $\underline{I}$ und der Zeitverlauf i(t). Effektivwertzeiger und Zeitverlauf sind zu skizzieren.

a) $\underline{\hat{i}} = 10A*e^{j45^\circ}$ b) $\underline{\hat{i}} = 14A*e^{-j45^\circ}$
c) $\underline{\hat{i}} = 200mA*e^{-j60^\circ}$ d) $\underline{\hat{i}} = 14.1mA*e^{j30^\circ}$

Aufgabe 6.2.4.
Gegeben ist der Effektivwertzeiger $\underline{I}$. Zu bestimmen sind der ruhende Scheitelwertzeiger $\underline{\hat{i}}$, der rotierende Scheitelwertzeiger $\underline{i}(t)$ und der Zeitverlauf i(t). Man skizziere Effektivwertzeiger und Zeitverlauf.

a) $\underline{I} = 20mA*e^{j40^\circ}$ b) $\underline{I} = 35.4mA*e^{-j50^\circ}$
c) $\underline{I} = 7.07A*/\underline{80^\circ}$ d) $\underline{I} = 10A*/\underline{-70^\circ}$

Aufgabe 6.2.5
Gegen ist der Zeitverlauf u(t). Bestimmen Sie den rotierenden Scheitelwertzeiger $\underline{u}(t)$, den ruhenden Scheitelwertzeiger $\underline{\hat{u}}$ und den Effektivwertzeiger $\underline{u}$. Skizzieren Sie Effektivwertzeiger und Zeitverlauf.

a) $u(t) = 28.3V*\cos(\omega t + 45^\circ)$ b) $u(t) = 10.0V*\cos(\omega t - 30^\circ)$
c) $u(t) = 70.7V*\sin(\omega t)$ d) $u(t) = 50.0V*\sin(\omega t - 30^\circ)$

Aufgabe 6.3.1
Addieren Sie im Zeitbereich $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$

a)	$u_1(t) = 10V*\cos(\omega t + 30^\circ)$	$u_2(t) = 20V*\cos(\omega t + 80^\circ)$
b)	$u_1(t) = 30V*\cos(\omega t - 20^\circ)$	$u_2(t) = 40V*\cos(\omega t + 50^\circ)$
c)	$u_1(t) = 50V*\cos(\omega t + 60^\circ)$	$u_2(t) = 100V*\cos(\omega t - 10^\circ)$
d)	$u_1(t) = 3V*\cos(\omega t - 60^\circ)$	$u_2(t) = 7V*\cos(\omega t - 90^\circ)$
e)	$u_1(t) = 2\ V*\cos(\omega t + 10^\circ)$	$u_2(t) = 5\ V*\cos(\omega t - 20^\circ)$

Aufgabe 6.3.2
Die Aufgabe 6.3.1 (Addition zweier harmonischer Schwingungen im Zeitbereich) ist mit Hilfe der komplexen

Rechnung zu lösen.

Aufgabe 6.3.3
Addieren Sie
a) $u(t) = 30V*\cos(\omega t + 40^\circ) + 60V*\cos(\omega t - 30^\circ)$
b) $u(t) = 6V*\cos(\omega t - 20^\circ) + 10V*\cos(\omega t - 40^\circ)$
c) $u(t) = 8V*\sin(\omega t + 40^\circ) + 4V*\cos(\omega t + 60^\circ)$
d) $i(t) = 8A*\cos(\omega t + 60^\circ) + 9*\cos(\omega t + 70^\circ)$

Aufgabe 6.3.4
Addieren Sie die Effektivwertzeiger $\underline{U}_3 = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$

a) $\underline{U}_1 = 60V*\underline{/90^\circ}$ $\underline{U}_2 = 30V*\underline{/40^\circ}$
b) $\underline{U}_1 = 40V*\underline{/-10^\circ}$ $\underline{U}_2 = 20V*\underline{/20^\circ}$
c) $\underline{U}_1 = 8V*\underline{/-30^\circ}$ $\underline{U}_2 = 25V*\underline{/-80^\circ}$

Aufgabe 6.4.1 (einfach)
Man bestimme arithmetischen Mittelwert, Effektivwert, Gleichrichtwert und Formfaktor der Funktionen aus Aufgabe 6.2.1.

Aufgabe 6.4.2
Berechnen Sie arithmetischen Mittelwert, Effektivwert, Gleichrichtwert, Formfaktor, Grundschwingungsgehalt und Klirrfaktor der folgenden Funktionen.

a) $u(t) = \sqrt{2}*30\ V*\cos(\omega t) + \sqrt{2}*10\ V*\cos(3\omega t)$

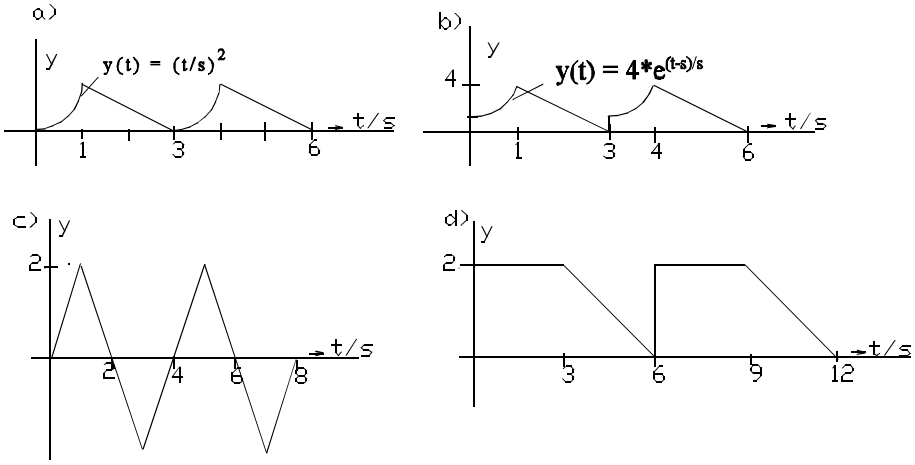
b) $u(t) = \sqrt{2}*50\ V*\cos(\omega t) + \sqrt{2}*20\ V*\cos(3\omega t)$

c) $u(t) = 100\ V + \sqrt{2}*50\ V*\cos(\omega t) + \sqrt{2}*20\ V*\cos(3\omega t)$

d) $u(t) = 200\ V + \sqrt{2}*300\ V*\cos(\omega t) + \sqrt{2}*100\ V*\cos(3\omega t)$

e) $u(t) = \sqrt{2}*30\ V*\cos(\omega t) + \sqrt{2}*10\ V*\cos(3\omega t) + \sqrt{2}*5\ V*\cos(5\omega t)$

Aufgabe 6.4.3
Der arithmetische Mittelwert $\bar{y}$ und der Effektivwert Y der unten dargestellten Funktionen y(t) sind zu berechnen.



Aufgabe 6.5.1
An einem ohmschen Widerstand R = 10 Ω ist der Spannungsverlauf u(t) = 141 V*cos(314 t/s - 50°). Geben Sie

den Zeitverlauf des Stromes i(t) an. Berechnen Sie die Größen û, î, U, I, φ_u, φ_i und φ. Bestimmen Sie die Wirkleistung P und die Blindleistung Q. Geben Sie die komplexen Größen U, I, Z und S an.

Aufgabe 6.5.2
In einer idealen Induktivität von L = 0.2 H = 0.2 Vs/A fließt ein Strom i(t) = 2 A*cos(314 t/s - 20°). Berechnen Sie die Größen û, î, U, I, φ_u, φ_i und φ. Bestimmen Sie die Wirkleistung P und die Blindleistung Q. Geben Sie die komplexen Größen U, I, Z und S an.

Aufgabe 6.5.3
An einem Kondensator von C = 2µF = 2µ As/V liegt eine Spannung von u(t) = 14.1 V*cos(6280 t/s + 30°). Berechnen Sie die Größen i(t), û, î, U, I, φ_u, φ_i, φ, P und Q. Geben Sie die komplexen Größen U, I, Z und S an.

Aufgabe 6.5.4
An der Reihenschaltung einer idealen Induktivität von L = 0.5 H = 0.5 Vs/A und eines Ohmschen Widerstandes R = 100 Ω liegt eine Spannung von U = 100 V, f = 50 Hz, $\varphi_u = 0°$. Berechnen Sie den Zeitverlauf $u_R(t)$, $u_L(t)$, i(t) mit Hilfe der komplexen Rechnung. Wie groß ist Blind- und Wirkleistung?

Aufgabe 6.5.5
In einer Parallelschaltung eines Kondensators von C = 0.1µF = 0.1µ As/V und eines Widerstandes R = 3 kΩ fließt ein Gesamtstrom von I = 10 mA, $\varphi_i = 0°$. Berechnen Sie U. f = 1 kHz

Aufgabe 6.5.6
Gegeben sind Zeitverläufe von Strom und Spannung. Berechnen Sie P, Q und S.

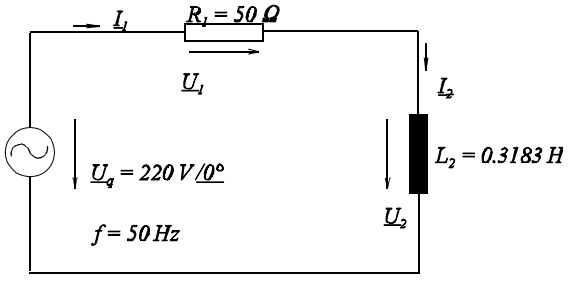
a) u(t) = 20 V*cos(ωt + 20°) i(t) = 1 A*cos(ωt - 30°)
b) u(t) = 311 V*cos(ωt - 30°) i(t) = 0.707 A*cos(ωt + 40°)

Aufgabe 6.5.7 (einfach)
An den unten angegebenen passiven Bauteil liegt die Spannung U = 220 V /0°. Berechnen Sie den Strom I. Skizzieren Sie die Zeiger U, I und den Zeitverlauf u(t) und i(t).

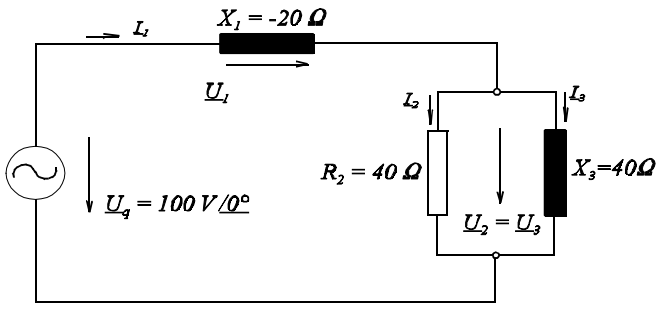
a) R = 100 Ω b) ωL = X = 200 Ω c) ωC = 0.004

Aufgabe 6.5.8
Bestimmen Sie für jeden Zweig Strom und Spannung. Geben Sie die komplexen Effektivwertzeiger und den Zeitverlauf an. Berechnen Sie Wirkleistung P und Blindleistung Q in jeden Zweig an.

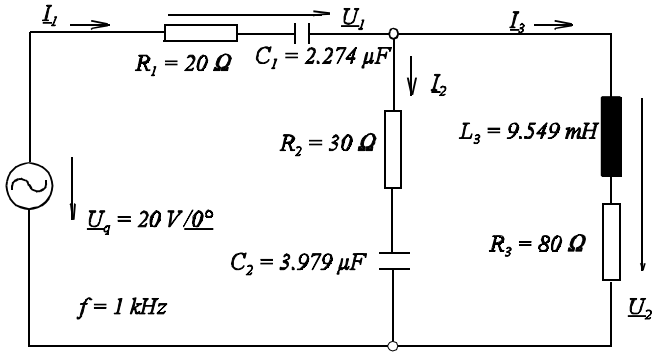
a)



b)



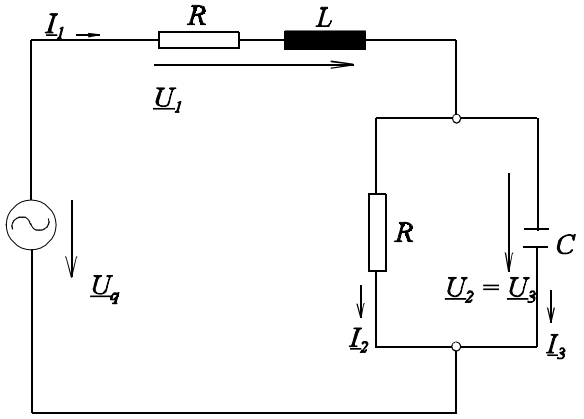
c)



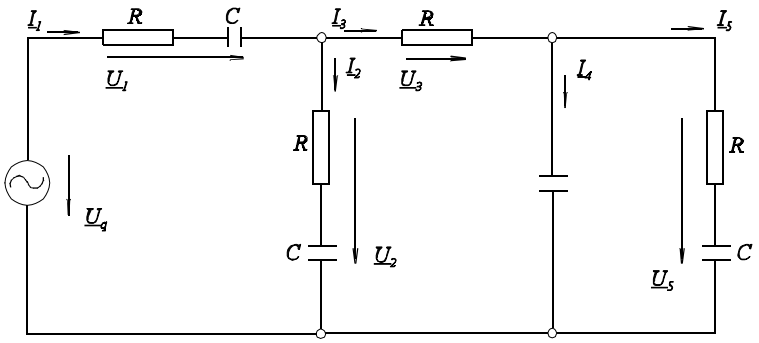
Aufgabe 6.5.9

In den beiden unteren Schaltungen sind alle ohmschen Widerstände R = 1 kΩ, alle C = 1 µF, alle L = 1 H und alle U_q = 20 V $\angle 0^\circ$, ω = 1000 s^{-1}. Berechnen Sie U, I, Z und S für jeden Zweig der Schaltung.

a)



b)



Aufgabe 6.5.10

An einer Reihenschaltung von R = 5 kΩ und C = 20 nF wird eine Phasenverschiebung $\varphi_{ui} = -60^\circ$ gemessen. Wie groß ist die Frequenz f.

Aufgabe 6.5.11

An einer Reihenschaltung von X und R wird eine Spannung U = 220 V, f = 50 Hz ein Strom I = 1.1 A und eine Wirkleistung P = 72.6 W gemessen. Wie groß sind ohmscher Widerstand R und Blindwiderstand X, bzw Induktivität L.

Aufgabe 6.5.12

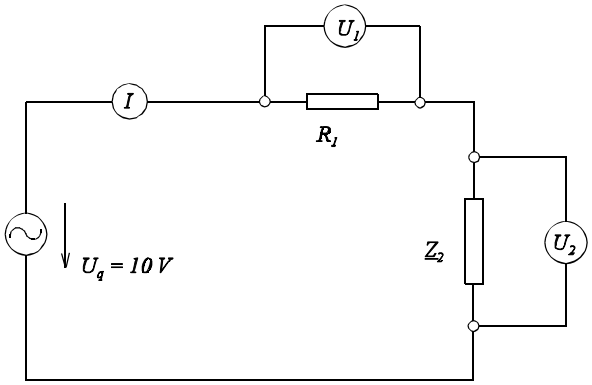
An einer Parallelschaltung von R und L wird eine Spannung von U = 20 V, f = 20 kHz, ein Strom I = 5 mA und eine Wirkleistung P = 30 mW gemessen. Wie groß sind R und L.

Aufgabe 6.5.13

In einer Reihenschaltung von R = 60 Ω, L = 0.1025 H und C = 4 µF fließt bei einer Spannung von U = 200 V ein Strom I = 2 A. Wie groß ist die Frequenz f.

Aufgabe 6.5.14

Der unbekannte komplexe Widerstand $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$ und der Widerstand R_1 sollen mit Hilfe der folgenden Schaltung bestimmt werden.



Gemessen wurden:

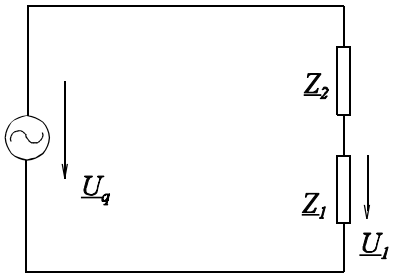
$U_q = 10$ V, $U_1 = 3$ V

$I = 10$ mA, $U_2 = 9$ V

Wie groß sind R_1, R_2 und X_2.

Aufgabe 6.6.1

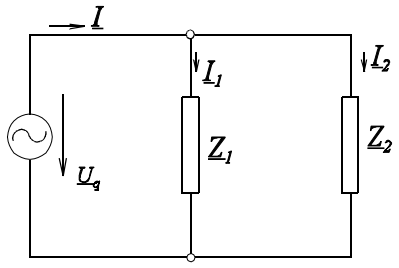
Bestimmen Sie ohne Berechnung des Stromes die Spannung $\underline{U}_1$.



a)	$\underline{Z}_1 = 10\ \Omega + j20\ \Omega$	$\underline{Z}_2 = 3\ \Omega + j15\ \Omega$	$\underline{U}_q = 100\text{ V} \angle 0^\circ$
b)	$\underline{Z}_1 = 10\ \Omega \angle -60^\circ$	$\underline{Z}_2 = 15\ \Omega \angle -30^\circ$	$\underline{U}_q = (40 + j40)$ V
c)	$\underline{Z}_1 = 30\ \Omega - j30\ \Omega$	$\underline{Z}_2 = 20\ \Omega \angle 50^\circ$	$\underline{U}_q = 20\text{ V} \angle 30^\circ$
d)	$\underline{Z}_1 = 3\ \Omega + j6\ \Omega$	$\underline{Z}_2 = 15\ \Omega - j2\ \Omega$	$\underline{U}_q = 40\text{ V} \angle -60^\circ$

Aufgabe 6.6.2

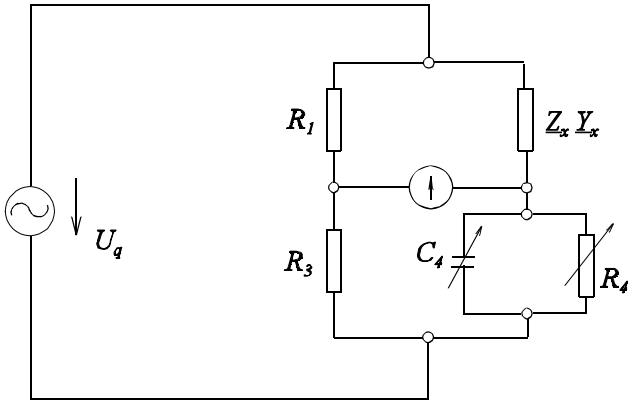
Berechnen Sie ohne den Ansatz über die Spannung den Strom $\underline{I}_1$.



a)	$\underline{Z}_1 = 10\ \Omega + j20\ \Omega$	$\underline{Z}_2 = 3\ \Omega + j15\ \Omega$	$\underline{I} = 10\text{ A} \angle 0^\circ$
b)	$\underline{Z}_1 = 10\ \Omega \angle -60^\circ$	$\underline{Z}_2 = 15\ \Omega \angle -30^\circ$	$\underline{I} = 20\text{ A} + j20\text{ A}$
c)	$\underline{Z}_1 = 30\ \Omega - j30\ \Omega$	$\underline{Z}_2 = 20\ \Omega \angle 50^\circ$	$\underline{I} = 5\text{ A} \angle 30^\circ$
d)	$\underline{Z}_1 = 3\ \Omega + j6\ \Omega$	$\underline{Z}_2 = 15\ \Omega - j2\ \Omega$	$\underline{I} = 48\text{ A} \angle -60^\circ$

Aufgabe 6.6.3

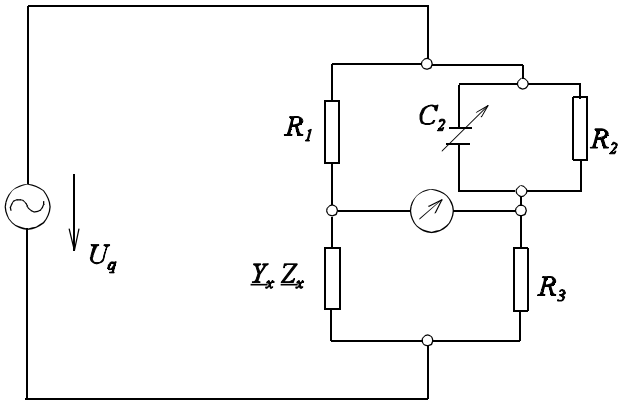
Die folgende Brücke ist abgeglichen. Bestimmen Sie das Ersatzschaltbild (ESB) und die Daten des realen Zweipols.



$R_1 = 100\ k\Omega$
$R_3 = 10\ k\Omega$
$C_4 = 0.5\ \mu F$
$R_4 = 2\ M\Omega$

Aufgabe 6.6.4

Die folgende Brücke ist abgeglichen. Bestimmen Sie das Ersatzschaltbild (ESB) und die Daten des realen Zweipols.



$R_1 = 500\ \Omega$
$R_3 = 1\ k\Omega$
$R_2 = 10\ k\Omega$
$C_2 = 0.5\ \mu F$

Aufgabe 6.6.5

Eine Leuchtstofflampe (U = 220 V, f = 50 Hz) mit einer Gesamtwirkleistungsaufnahme P = 50 W und einem $\cos(\varphi_1) = 0.5$ induktiv soll durch Parallelschaltung eines Kondensators einen $\cos(\varphi_2) = 0.9$ induktiv bekommen. Wie groß ist der Kondensator C zu wählen. Wie groß sind Wirk-, Blind- und Scheinleistung vor der Kompensation (Index 1) und nach der Kompensation (Index 2).

Aufgabe 6.6.6

Ein Motor nimmt an 220 V/50 Hz Wechselspannung eine Wirkleistung von 4 kW und eine Blindleistung von 6 kVar induktiv auf. Wie groß ist eine parallele Kapazität zu wählen, damit eine resultierte Blindleistung von 200 Var auftritt.

Aufgabe 6.6.7

Eine Spannungsquelle $\underline{U}_q = 100\ V\ \angle 0^\circ$ mit dem Innenwiderstand $Z_i = 10\ \Omega + j20\ \Omega$ wird mit dem Widerstand $\underline{Z} = R + jX$ belastet. Wie groß müssen R und X gewählt werden damit

a) die Wirkleistung P maximal wird und
b) die Scheinleistung S ein Maximum hat.
c) Wie groß ist P_{max} für a).
d) Berechnen Sie S_{max} für b).

Aufgabe 6.6.8

Wandeln Sie die Reihenschaltung $\underline{Z}_R = R_R + jX_R$ in eine äquivalente Parallelschaltung mit R_p und X_p um. Unter welcher Bedingung ist diese Umformung zulässig?

a) $\underline{Z}_R = (10 + j20)\ \Omega$ b) $\underline{Z}_R = (80 - j60)\ \Omega$

Aufgabe 6.6.9

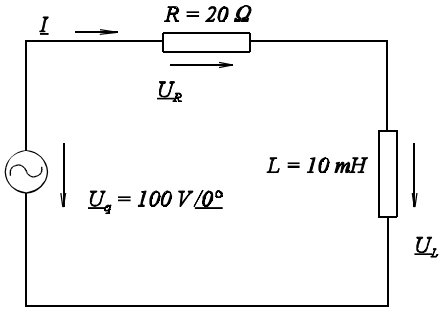
Wandeln Sie die Parallelschaltung R_p und X_p in eine äquivalente Reihenschaltung mit $\underline{Z}_R = R_R + jX_R$ um. Unter welcher Bedingung ist diese Umformung zulässig?

a) $R_p = 20\ \Omega$ $X_p = 50\ \Omega$
b) $R_p = 10\ \Omega$ $X_p = -60\ \Omega$

Aufgabe 6.7.1

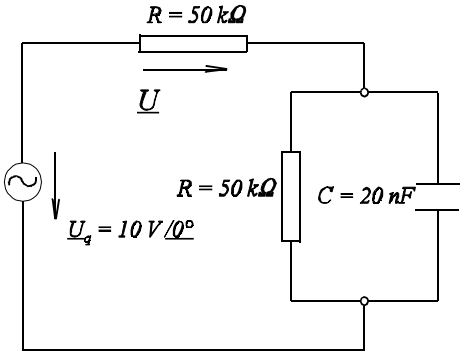
Bestimmen Sie bei den unteren Schaltungen die gesuchten Ortskurven in Abhängigkeit der Frequenz.

a)



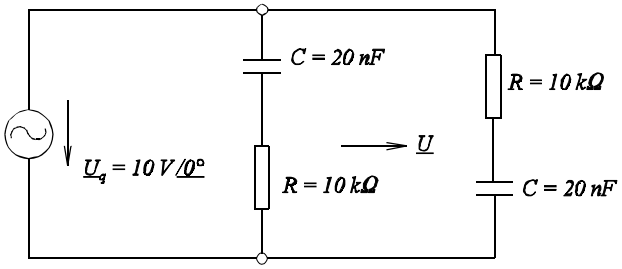
gesucht: Z, Y, I, S, U_R, U_L

b)



gesucht: U

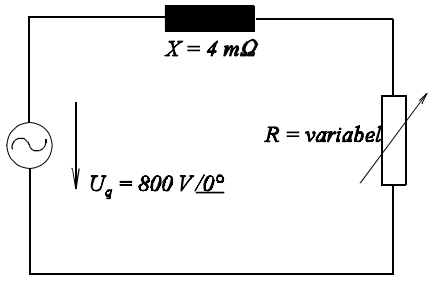
c)



gesucht: U

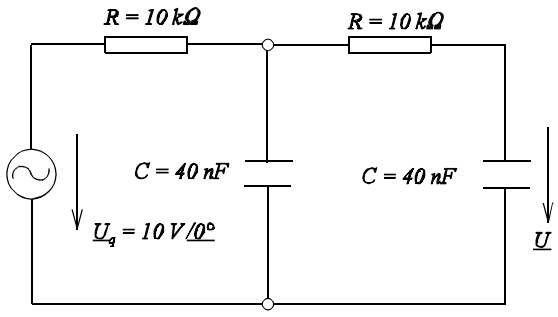
Aufgabe 6.7.2

Bestimmen Sie die Ortskurve der Leistung S(R).



Aufgabe 6.7.3

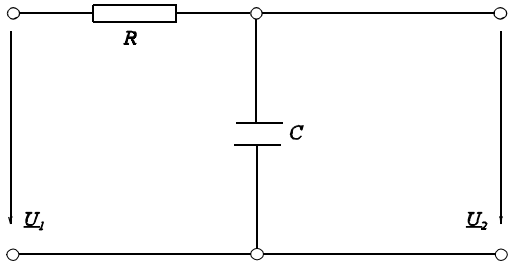
Bestimmen Sie die Ortskurve der Ausgangsspannung U(jω).



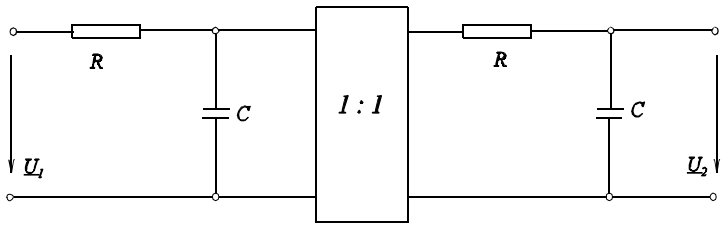
Aufgabe 6.7.4

Von den folgenden Schaltungen ist der Frequenzgang $\underline{F}(j\omega) = \underline{U}_2(j\omega)/\underline{U}_1(j\omega)$ zu bestimmen und mit Hilfe des Bodediagramms darzustellen. (R = 10 kΩ, C = 333.3 nF)

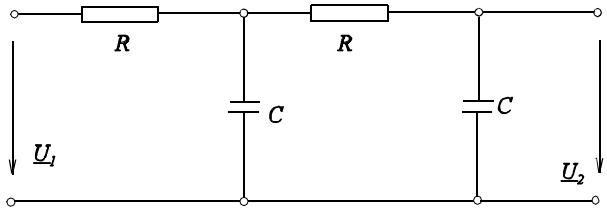
a)



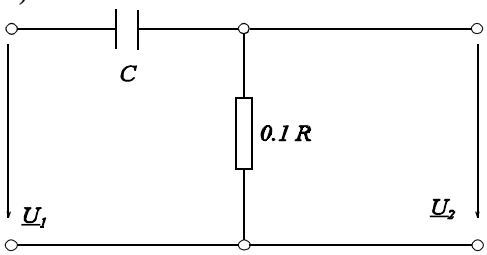
b)



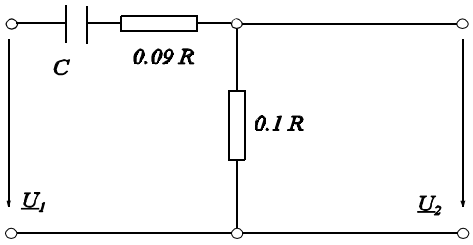
c)



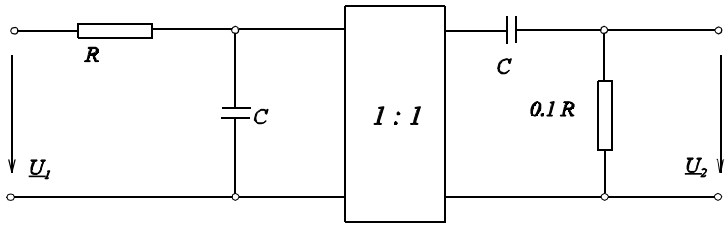
d)



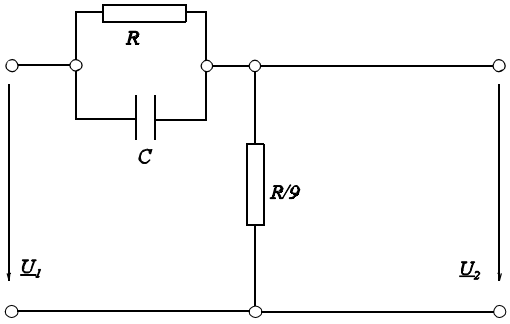
e)



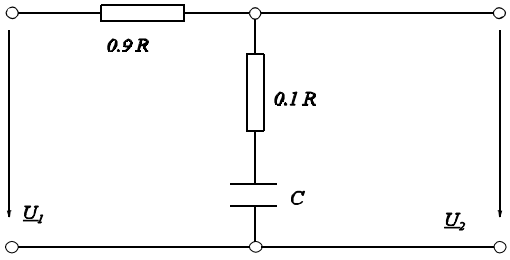
f)



g)



h)



Aufgabe 6.7.5

Mit welcher Frequenz f_0 führt ein Schwingkreis mit L und C freie Schwingungen (Eigenschwingung) aus.

a) L = 10 mH C = 100 nF
b) L = 1 H C = 1 µF

Aufgabe 6.7.6

Ein Reihenschwingkreis besteht aus den Elementen R, L und C. Berechnen Sie die Resonanzfrequenz f_0, die Güte Q, die obere f_2 und die untere Grenzfrequenz f_1 und die Bandbreite Δf. Der Reihenschwingkreis wird mit einer Spannung $\underline{U}_q = 10\ V\angle 0^\circ$ gespeist. Berechnen Sie $\underline{U}_R(\omega)$ nach Betrag und Phase für $f = f_0/2$, f_1, f_0, f_2 und $2f_0$.

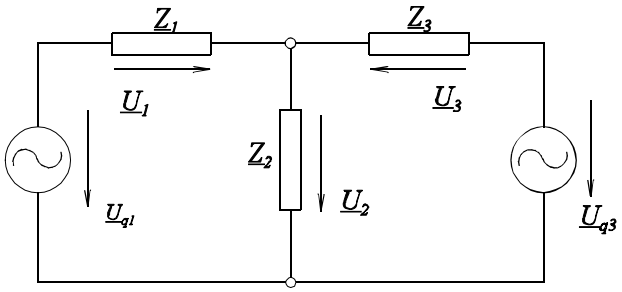
a) L = 10 mH C = 10 nF R = 100 Ω
b) L = 1 mH C = 200 pF R = 447.2 Ω

Aufgabe 6.7.7

Ein Parallelschwingkreis besteht aus den Elementen R, L und C. Berechnen Sie die Resonanzfrequenz f_0, die Güte Q, die obere f_2 und die untere Grenzfrequenz f_1 und die Bandbreite Δf. Der Parallelschwingkreis wird mit einem Strom $\underline{I}_q = 2\ mA\angle 0^\circ$ gespeist. Berechnen Sie $\underline{U}(\omega)$ nach Betrag und Phase für $f = f_0/2$, f_1, f_0, f_2 und $2f_0$.

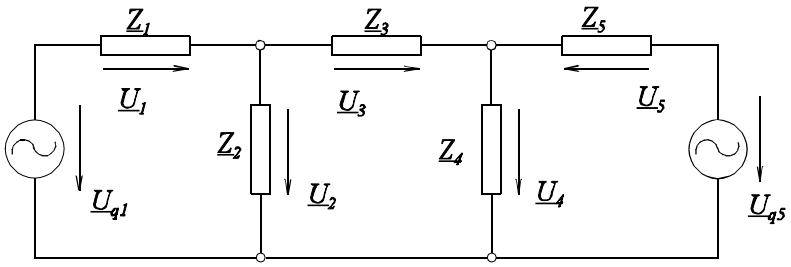
a) L = 10 mH C = 10 nF R = 10 kΩ
b) L = 1 mH C = 200 pF R = 11.18 kΩ

Netzwerk 6.8A



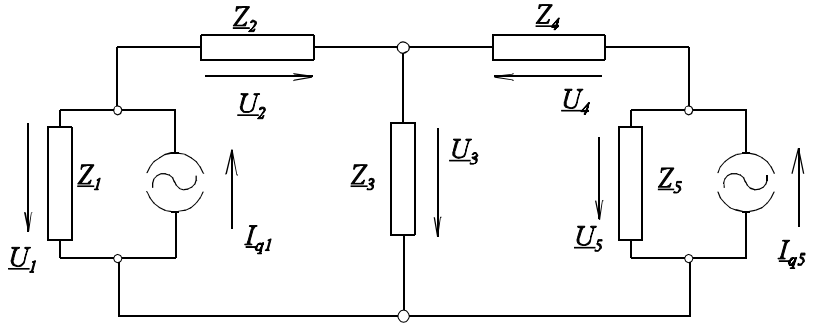
$\underline{U}_{q1} = 100\ V\angle 0^\circ$
$\underline{U}_{q3} = 120\ V\angle 90^\circ$
$\underline{Z}_1 = 10\ \Omega + j20\ \Omega$
$\underline{Z}_2 = 50\ \Omega - j30\ \Omega$
$\underline{Z}_3 = 20\ \Omega + j40\ \Omega$

Netzwerk 6.8B



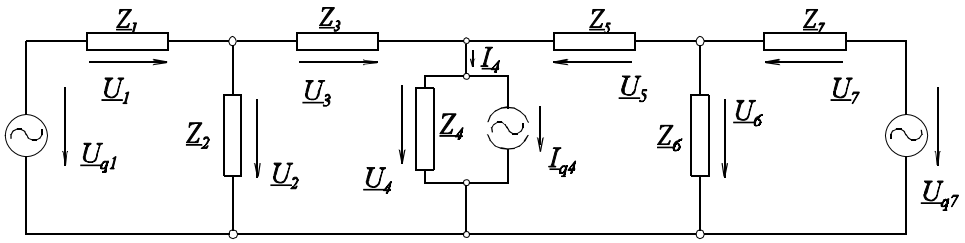
$\underline{U}_{q1} = 100\ V\angle 0^\circ$
$\underline{U}_{q5} = 150\ V\angle 30^\circ$
$\underline{Z}_1 = 10\ \Omega + j20\ \Omega$
$\underline{Z}_2 = 5\ \Omega + j10\ \Omega$
$\underline{Z}_3 = 70\ \Omega + j80\ \Omega$
$\underline{Z}_4 = 2\ \Omega + j15\ \Omega$
$\underline{Z}_5 = 8\ \Omega + j12\ \Omega$

Netzwerk 6.8C



$\underline{I}_{q1} = 10\ A\angle 0^\circ$
$\underline{I}_{q5} = 5\ A\angle -60^\circ$
$\underline{Z}_1 = (10 + j10)\ \Omega$
$\underline{Z}_2 = (2 + j4)\ \Omega$
$\underline{Z}_3 = (60 + j80)\ \Omega$
$\underline{Z}_4 = (3 - j6)\ \Omega$
$\underline{Z}_5 = (10 + j17.32)\ \Omega$

Netzwerk 6.8D



$\underline{U}_{q1} = 100\ V\ \underline{/0^\circ}$ $\underline{U}_{q7} = 100\ V\ \underline{/60^\circ}$ $\underline{I}_{q4} = 10\ A\ \underline{/30^\circ}$

$\underline{Z}_1 = 2\ \Omega + j10\ \Omega$ $\underline{Z}_2 = 100\ \Omega$ $\underline{Z}_3 = -j50\ \Omega$

$\underline{Z}_4 = 10\ \Omega$ $\underline{Z}_5 = -j50\ \Omega$ $\underline{Z}_6 = 200\ \Omega$

$\underline{Z}_7 = 3\ \Omega + j9\ \Omega$

Aufgabe 6.8.1
Die folgenden komplexen Gleichungssysteme sind in reelle umzuformen

a) $$\begin{pmatrix} 4+j3 & 5+j6 \\ 7-j8 & 2-j3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+j8 \\ 1-j7 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 3-j2 & 0 & 1+j7 \\ 0 & 5+j5 & 2-j3 \\ 1+j7 & 2-j3 & 2-j4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \underline{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-j7 \\ 0 \\ 5+j8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.8.2
Stellen Sie das komplexe Gleichungssystem in Matrix-Form auf mit Hilfe des Maschenstrom-Verfahrens. Das komplexe Gleichungssystem ist in ein reelles umzuformen.

a) Netzwerk 6.8A b) Netzwerk 6.8B c) Netzwerk 6.8D

Aufgabe 6.8.3
Stellen Sie das komplexe Gleichungssystem in Matrix-Form auf mit Hilfe des Knotenpunktpotential-Verfahrens. Das komplexe Gleichungssystem ist in ein reelles umzuformen.

a) Netzwerk 6.8C b) Netzwerk 6.8D

Aufgabe 6.8.4
Berechnen Sie den Strom der Quelle 1 aus Netzwerk 6.8A mit Hilfe der Stern-Dreieck-Umformung.

Aufgabe 6.8.5
Berechnen Sie den Strom der Quelle 1 aus Netzwerk 6.8B.

a) Das mittlere Dreieck ist in einen Stern umzuformen.
b) Der verbleibende Stern ist in ein Dreieck umzuwandeln.
c) Der Strom $\underline{I}_1$ ist zu berechnen.

Aufgabe 6.8.6
Berechnen Sie durch Quellenumwandlung:

a) Die Spannung $\underline{U}_2$ aus Netzwerk 6.8A.
b) Den Strom $\underline{I}_5$ aus Netzwerk 6.8B.
c) Die Spannung $\underline{U}_3$ aus Netzwerk 6.8C.
d) Die Spannung $\underline{U}_4$ aus Netzwerk 6.8D

Aufgabe 6.8.7
Berechnen Sie nach den Überlagerungsprinzip.
a) Den Strom $\underline{I}_2$ aus Netzwerk 6.8A. b) Den Strom $\underline{I}_3$ aus Netzwerk 6.8C.

Aufgabe 6.8.8
Berechnen Sie nach dem Ersatzquellen-Prinzip.
a) Den Strom $\underline{I}_2$ aus Netzwerk 6.8A.
b) Die Spannung $\underline{U}_3$ aus Netzwerk 6.8B.
c) Den Strom $\underline{I}_3$ aus Netzwerk 6.8C.

Aufgabe 6.8.9
Bestimmen Sie die notwendigen Matrizen und Vektoren für das Maschenstrom-Verfahren für den Rechner. Geben Sie Bestimmungsgleichung in Matrixform für den Zweigstromvektor $\underline{\vec{I}}$ an.
a) Netzwerk 6.8A b) Netzwerk 6.8D

Aufgabe 6.8.10
Bestimmen Sie die notwendigen Matrizen und Vektoren für das Knotenpunktpotential-Verfahren für den Rechner. Geben Sie Bestimmungsgleichung in Matrixform für den Zweigspannungsvektor $\underline{\vec{U}}$ an.
a) Netzwerk 6.8C b) Netzwerk 6.8D

Aufgabe 6.9.1
Ein 380 V-Netz mit Nulleiter wird mit einer symmetrischen Last in Sternschaltung belastet. Die Spannung $\underline{U}_1$ ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.
a) $\underline{Z} = 10\ \Omega + j30\ \Omega$ b) $\underline{Z} = 8\ \Omega - j\ 6\ \Omega$

Aufgabe 6.9.2
Ein 380 V-Netz ohne Nulleiter wird mit einer symmetrischen Last in Sternschaltung belastet. Die Spannung $\underline{U}_1$ ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.
a) $\underline{Z} = 2\ \Omega + j1\ \Omega$ b) $\underline{Z} = 0.2\ \Omega + j0.1\ \Omega$

Aufgabe 6.9.3
Ein 380 V-Netz wird mit einer symmetrischen Last in Dreieckschaltung belastet. Die Spannung $\underline{U}_1$ ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.
a) $\underline{Z} = 10\ \Omega + j30\ \Omega$ b) $\underline{Z} = 8\ \Omega - j\ 6\ \Omega$

Aufgabe 6.9.4
Ein 380 V-Netz wird mit einer unsymmetrischen Last in Dreieckschaltung belastet. Die Spannung $\underline{U}_1$ ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.
a) $\underline{Z}_{12} = 19\ \Omega$ $\underline{Z}_{23} = -j19\ \Omega$ $\underline{Z}_{31} = +j19\ \Omega$
b) $\underline{Z}_{12} = 4\ \Omega$ $\underline{Z}_{23} = 6\ \Omega$ $\underline{Z}_{31} = 8\ \Omega$

Aufgabe 6.9.5
Ein 380 V-Netz mit Nulleiter wird mit einer unsymmetrischen Last in Sternschaltung belastet. Die Spannung $\underline{U}_1$ ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.
a) $\underline{Z}_1 = 19\ \Omega$ $\underline{Z}_2 = -j19\ \Omega$ $\underline{Z}_3 = +j19\ \Omega$
b) $\underline{Z}_1 = 4\ \Omega$ $\underline{Z}_2 = 6\ \Omega$ $\underline{Z}_3 = 8\ \Omega$

Aufgabe 6.9.6
Ein 380 V-Netz ohne Nulleiter wird mit einer unsymmetrischen Last in Sternschaltung belastet. Die Spannung $\underline{U}_1$ ist rein reell. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.
a) $\underline{Z}_1 = 10\ \Omega$ $\underline{Z}_2 = 20\ \Omega$ $\underline{Z}_3 = 30\ \Omega$
b) $\underline{Z}_1 = 30\ \Omega$ $\underline{Z}_2 = 20\ \Omega$ $\underline{Z}_3 = 10\ \Omega$

Aufgabe 6.9.7

Drei Wechselspannungsquellen 220 V (jeweils um 120° Phasenverschoben) sind im Dreieck verschaltet und speisen eine symmetrische Last im Sternschaltung. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.

a) $\underline{Z} = 10\ \Omega + j30\ \Omega$ b) $\underline{Z} = 8\ \Omega - j6\ \Omega$

Aufgabe 6.9.8

Drei Wechselspannungsquellen 220 V (jeweils um 120° Phasenverschoben) sind im Stern verschaltet und speisen eine unsymmetrische Last im Dreieckschaltung. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und dessen Beträge. Bestimmen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.

a) $\underline{Z}_{12} = 19\ \Omega$ $\underline{Z}_{23} = -j19\ \Omega$ $\underline{Z}_{31} = -j19\ \Omega$
b) $\underline{Z}_{12} = 4\ \Omega$ $\underline{Z}_{23} = 6\ \Omega$ $\underline{Z}_{31} = 8\ \Omega$

Aufgabe 6.9.9

Bei der Leistungsmessung mit Hilfe der Aronschaltung werden die Wirkleistungen P_1 und P_2 an einer symmetrischen Last gemessen. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Zu bestimmen sind Strom I, Schein-, Wirk- und Blindleistung. Das Drehstromsystem ist rechtsdrehend (U=380 V).

a) $P_1 = 20$ kW $P_2 = 40$ kW
b) $P_1 = 60$ kW $P_2 = 10$ kW

Aufgabe 6.9.10 (aufwendig)

Gegeben ist ein rechtsdrehendes Drehstromsystem mit der Leiterspannung $U_L = 380$ V / 50 Hz. Belastet wird das System mit einer unsymmetrischen Sternschaltung mit Nulleiter.

Phase 1: $R = 10\ \Omega$
Phase 2: $R_2 = 5\ \Omega$ $L_2 = 47.75$ mH
Phase 3: $R_3 = 20\ \Omega$ $C_3 = 159.2\ \mu$F

a) Berechnen Sie sämtliche komplexe Ströme, Spannungen und Leistungen.
b) Geben Sie den Zeitverlauf der Ströme und Spannungen an.
c) Geben Sie Wirk-, Blind- und Scheinleistungen an.
d) Skizzieren Sie die komplexen Strom- und Spannungszeiger.
e) Skizzieren Sie den Zeitverlauf von $i_3(t)$ und den Spannung $u_{R3}(t)$, $u_{C3}(t)$ und $u_3(t)$.
f) Begründen Sie anhand der komplexen Zeiger einerseits und des Zeitverlaufs anderseits welche Größe im Strang 3 nach- oder voreilt.
g) Geben Sie an für den Strom i_3 den arithmetischen und quadratischen Mittelwert, den Gleichrichtwert und den Formfaktor an.
h) Mit welcher Methode läßt sich in dieser Schaltung die Leistung messen.

Aufgabe 6.9.11 (sehr aufwendig)

Die Schaltung aus Aufgabe 6.9.10 wird nun ohne Nulleiter ausgeführt.

a) Stellen Sie ein komplexes Gleichungssystem nach den Maschenstrom-Verfahren auf.
b) Überführung in ein reelles G.S..
c) Berechnung von Strom und Spannung durch Netzumformung.
d) Probe durch Einsetzen der Lösung c) in das G.S. unter b.
e) Berechnung der Spannung zwischen den Sternpunkten und Darstellung als Ortskurve in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω.
f) Welche Werte zeigen die Wattmeter in Aronschaltung an.

Aufgabe 7.1

Ein Hohlzylinder aus mäßig leitendem Material ($\rho = 0.02\ \Omega$m) der Höhe $h = 1$ cm, dem Innenradius $r_1 = 2$ cm und dem Außenradius $r_2 = 10$ cm wird an der inneren und äußeren Mantelfläche kontaktiert mit gut leitenden Material ($\rho \to 0$). Angeschlossen wird eine Spannung U = 10 V (Pluspol innen)

a) Berechnen Sie den Widerstand analytisch.
b) Bestimmen Sie den Widerstand grafisch.
c) Geben Sie das Vektorfeld von Stromdichte und Feldstärke an.
d) Berechnen Sie das skalare Potentialfeld.
e) Geben Sie die Leistungsdichte der Wirkleistung an.
f) Bestimmen Sie durch Volumen-Integration die gesamte Wirkleistung.
g) Wie wäre der Wert unter f) schneller zu berechnen.

Aufgabe 7.2
Über einen im Erdboden verankerten Stahlmast fließt ein Kurzschlußstrom I_K = 100 A ins Erdreich mit der Leitfähigkeit $\varkappa$ = 0.01 S/m. Es soll angenommen werden, daß der Mast eine metallische ($\varkappa \to \infty$) Halbkugel von Radius r_1 = 0.5 m darstellt.

a) Berechnen Sie den Widerstand gegenüber den Erdboden (Halbkugel mit $r_2 = \infty$).
b) Bestimmen Sie die Spannung gegenüber dem entfernten Erdreich.
c) Geben Sie das Vektorfeld von Stromdichte und Feldstärke an.
d) Berechnen Sie das skalare Potentialfeld.
e) Geben Sie die Leistungsdichte der Wirkleistung an.
f) Bestimmen Sie durch Volumen-Integration die gesamte Wirkleistung.
g) Wie wäre der Wert unter f) schneller zu berechnen.

Aufgabe 8.1 (einfach)
Die Kapazitäten C_1 = 1µF und C_2 = 4 µF werden
a) parallel geschaltet
b) in Reihe geschaltet.
Wie groß ist jeweils die Gesamtkapazität.

Aufgabe 8.2
Ein Koaxialkabel der Länge l = 100 m, dem Innenradius r_1 = 1 mm und dem Außenradius r_2 = 3 mm wird an eine Spannung von U = 100 V/100 kHz angeschlossen. Die relative Permeabilität des Dielektrikums beträgt ϵ_r = 4. Wie groß ist der Eingangsstrom der leerlaufenden Leitung.

Aufgabe 8.3
Eine leerlaufende 380 kV/50 Hz Leitung ist unüblicherweise im Sternpunkt geerdet. Die Leitung ist in einer Ebene 20 m über der Erde angeordnet. Die Leiter haben einen Abstand a = 4 m voneinander und einen Durchmesser von d = 6 cm. (l = 100 km).

a) Die Leiter-Leiter-Kapazitäten C_{12}, C_{23} und C_{31} sind zu bestimmen.
b) Berechnen Sie Leiter-Erde-Kapazitäten C_{10}, C_{20} und C_{30}.
c) Zeichnen Sie ein ESB.
d) Die Ströme infolge der Erde-Kapazitäten sind zu bestimmen.
e) Berechnen Sie die Ströme infolge der Leiter-Leiter-Kapazitäten.
f) Geben Sie den Gesamtstrom an.
g) Die Erdung des Sternpunktes wird entfernt. Wie groß ist der Leiterstrom.

Aufgabe 8.4
Zwei Punktladungen $Q_1 = +10^{-9}$ As und $Q_2 = -10^{-8}$ As befinden sich im Abstand r = 5 cm. Welche Kraft wirkt auf diese Ladung. In welcher Richtung wirkt
diese Kraft.

Aufgabe 8.5
In einem Plattenkondensator (homogenes Feld) von 10 cm Abstand befindet sich eine Ladung $Q = 10^{-9}$ As. Am Plattenkondensator liegt eine Spannung von U = 50 kV. Wie groß ist die Kraft auf die Ladung und in welcher Richtung ist die Kraft gerichtet.

Aufgabe 8.6

Ein Plattenkondensator ist mit Chlophen ($\varrho = 10^{13}\ \Omega$m, $\epsilon_r = 4.5$) gefüllt. Die Plattenfläche beträgt A = 0.3 m^2 und der Abstand a = 1 mm.

a) Die Kapazität C ist zu bestimmen.
b) Berechnen Sie den Parallelwiderstand R.
c) Wie groß ist die Zeitkonstante T.
d) Der Kondensator wird auf U_0 = 1000 V aufgeladen. Wie groß ist die gespeichert Ladung Q.
e) Bestimmen Sie die gespeicherte Energie W.
f) Nach welcher Zeit hat sich durch Entladung die Spannung auf U = 750 V verringert.

Aufgabe 8.7

Ein Hochspannungsplattenkondensator mit Phenolharz als Dielektrikum ($\epsilon_r = 5$) wird an eine Spannung von 10 kV/50 Hz angeschlossen Maße: A = 0.1 m^2 a = 1 cm. Der Verlustfaktor beträgt tan δ = 0.1. Wie groß ist die Verlustleistung.

Aufgabe 8.8

Zwei verlustbehaftete Kapazitäten (C_1 = 1 µF, R_1 = 1 MΩ) und (C_2 = 2 µF, R_2 = 5 MΩ) sind in Reihe geschaltet und an eine Gesamtspannung von U = 100 V angeschlossen.

a) Welche Spannung $u_1(t = 0)$ und $u_2(t = 0)$ stellen sich an Anfang ein.
b) Welche Spannungsverteilung $u_1(t = \infty)$ und $u_2(t = \infty)$ ergibt sich für $t \to \infty$.

Aufgabe 8.9

Ein konzentrischer Kugelkondensator mit Luft als Dielektrikum wird an eine Spannung U = 1000 kV (positive Spannung innen) gelegt. Die Radien sind r_2 = 2 m und r_1 = 0.5 m.

a) Die Kapazität ist zu bestimmen.
b) Bestimmen Sie die gespeicherte Ladung Q.
c) Die elektrischen Vektorfelder D und E sind anzugeben.
d) Bestimmen Sie das skalare Potentialfeld φ aus dem Feldstärkefeld E [$\varphi(r_2) = 0$].
e) Berechnen Sie die Dichte der gespeicherten elektrischen Energie dW.
f) Bestimmen Sie durch Volumenintegration die gesamte gespeicherte Energie.
g) Wie wäre der Wert unter f) schneller zu berechnen.
h) Wie groß ist der Maximalwert der Feldstärke.

Aufgabe 8.10

Wie groß ist die Kraft auf die Kondensatorplatten eines homogenen Plattenkondensators in Luft. A = 0.5 m^2, a = 1 cm, U = 1000 V.

Aufgabe 8.11

Der Abstand a aus Aufgabe 8.10 wird bei gleicher anliegender Spannung variiert. Der Verlauf der Größen

C(x) - Kapazität
E(x) - elektrische Feldstärke
D(x) - elektrische Flußdichte
Q(x) - gespeicherte Ladung
F(x) - Kraft die Kondensatorplatten
W(x) - gespeicherte elektrische Energie

ist in Abhängigkeit des Plattenabstandes x anzugeben.

Ergebnisse

Aufgabe 6.2.1

a)	$\hat{u} = 100V$	$\omega = 628s^{-1}$	$f = 100Hz$	$T = 10ms$	$\varphi = 30^\circ$
b)	$\hat{i} = 10A$	$\omega = 314s^{-1}$	$f = 50Hz$	$T = 20ms$	$\varphi = -60^\circ$
c)	$\hat{u} = 14.1V$	$\omega = 503s^{-1}$	$f = 80Hz$	$T = 12.5ms$	$\varphi = -75^\circ$
d)	$\hat{i} = 14.1A$	$\omega = 3140s^{-1}$	$f = 500Hz$	$T = 2ms$	$\varphi = 60^\circ$

Aufgabe 6.2.2

a)	$\underline{\hat{u}} = 141V\angle 45^\circ$	$\underline{U} = 100V\angle 45^\circ$	$u(t) = 141V*\cos(\omega t + 45^\circ)$
b)	$\underline{\hat{u}} = 100V\angle -45^\circ$	$\underline{U} = 70.7V\angle -45^\circ$	$u(t) = 100V*\cos(\omega t - 45^\circ)$
c)	$\underline{\hat{u}} = 28.2V\angle 30^\circ$	$\underline{U} = 20V\angle 30^\circ$	$u(t) = 28.2V*\cos(\omega t + 30^\circ)$
d)	$\underline{\hat{u}} = 141V\angle -60^\circ$	$\underline{U} = 100V\angle -60^\circ$	$u(t) = 141V*\cos(\omega t - 60^\circ)$

Aufgabe 6.2.3

a)	$\underline{i}(t) = 10A\angle \omega t+45^\circ$	$\underline{I} = 7.07A\angle 45^\circ$	$i(t) = 10A*\cos(\omega t + 45^\circ)$
b)	$\underline{i}(t) = 14A\angle \omega t-45^\circ$	$\underline{I} = 10A\angle -45^\circ$	$i(t) = 14A*\cos(\omega t - 45^\circ)$
c)	$\underline{i}(t) = 200mA\angle \omega t-60^\circ$	$\underline{I} = 141mA\angle -60^\circ$	$i(t) = 200mA*\cos(\omega t - 60^\circ)$
d)	$\underline{i}(t) = 14.1mA\angle \omega t+30^\circ$	$\underline{I} = 10mA\angle 30^\circ$	$i(t) = 14.1mA*\cos(\omega t + 30^\circ)$

Aufgabe 6.2.4

a)	$\underline{\hat{i}} = 28.2mA\angle 40^\circ$	$\underline{i}(t) = 28.2mA\angle \omega t+40^\circ$	$i(t) = 28.2mA*\cos(\omega t + 40^\circ)$
b)	$\underline{\hat{i}} = 50mA\angle -50^\circ$	$\underline{i}(t) = 50*mA\angle \omega t-50^\circ$	$i(t) = 50mA*\cos(\omega t - 50^\circ)$
c)	$\underline{\hat{i}} = 10A\angle 80^\circ$	$\underline{i}(t) = 10A\angle \omega t+80^\circ$	$i(t) = 10A*\cos(\omega t + 80^\circ)$
d)	$\underline{\hat{i}} = 14.1A\angle -70^\circ$	$\underline{i}(t) = 14.1A\angle \omega t-70^\circ$	$i(t) = 14.1A*\cos(\omega t - 70^\circ)$

Aufgabe 6.2.5

a)	$\underline{u}(t) = 28.3V*e^{j(\omega t+45^\circ)}$	$\underline{\hat{u}} = 28.3V*e^{j45^\circ}$	$\underline{U} = 20V*e^{j45^\circ}$
b)	$\underline{u}(t) = 10.0V*e^{j(\omega t-30^\circ)}$	$\underline{\hat{u}} = 10V*e^{-j30^\circ}$	$\underline{U} = 7.07V*e^{-j30^\circ}$
c)	$u(t) = 70.7V*\cos(\omega t-90^\circ)$	$\underline{u}(t) = 70.7V*e^{j(\omega t-90^\circ)}$	
	$\underline{\hat{u}} = 70.7V*e^{-j90^\circ}$	$\underline{U} = 50.0V*e^{-j90^\circ}$	
d)	$u(t) = 50.0V*\cos(\omega t-120^\circ)$	$\underline{u}(t) = 50.0V*e^{j(\omega t-120^\circ)}$	
	$\underline{\hat{u}} = 50.0V*e^{-j120^\circ}$	$\underline{U} = 35.4V*e^{-j120^\circ}$	

Aufgabe 6.3.1 und 6.3.2.

a)	$\underline{\hat{u}}_3 = 27.52V\angle 63.84^\circ$	b)	$\underline{\hat{u}}_3 = 57.63V\angle 20.71^\circ$
c)	$\underline{\hat{u}}_3 = 126.18V\angle 11.86^\circ$	d)	$\underline{\hat{u}}_3 = 9.71V\angle -81.12^\circ$
e)	$\underline{\hat{u}}_3 = 6.81V\angle -11.55^\circ$		

Aufgabe 6.3.3

a)	$\underline{\hat{u}}_3 = 75.71V\angle -8.14^\circ$	$u_3(t) = 75.71V*\cos(\omega t - 8.14^\circ)$	
b)	$\underline{\hat{u}}_3 = 15.77V\angle -32.52^\circ$	$u_3(t) = 15.77V*\cos(\omega t - 32.52^\circ)$	
c)	$\sin(\omega t + 40^\circ) = \cos(\omega t - 50^\circ)$	$\underline{\hat{u}}_3 = 7.62V\angle -20.46^\circ$	$u_3(t) = 7.62V*\cos(\omega t - 20.46^\circ)$
d)	$\underline{\hat{u}}_3 = 16.94V\angle 65.29^\circ$	$u_3(t) = 16.94V\angle 65.29^\circ$	

Aufgabe 6.3.4

a)	$\underline{U}_3 = 82.55V\angle 73.84^\circ$	b)	$\underline{U}_3 = 58.19V\angle -0.10^\circ$
c)	$\underline{U}_3 = 30.76V\angle -68.51^\circ$		

Aufgabe 6.4.1

a) $\bar{u} = 0$ U = 70.71 V $|\bar{u}| = 63.66$ V $F_u = 1.11$

b) $\bar{i} = 0$ U = 7.071 A $|\bar{i}| = 6.366$ A $F_i = 1.11$

c) $\bar{u} = 0$ U = 9.970 V $|\bar{u}| = 8.976$ V $F_u = 1.11$

d) $\bar{i} = 0$ U = 9.970 A $|\bar{i}| = 8.976$ A $F_i = 1.11$

Aufgabe 6.4.2

a) $\bar{u} = 0$ U = 31.62 V $|\bar{u}| = 24.01$ V

$F_u = 1.317$ $g_u = 0.9487$ $d_u = 0.3162$

b) $\bar{u} = 0$ U = 53.85 V $|\bar{u}| = 39.59$ V

$F_u = 1.360$ $g_u = 0.9284$ $d_u = 0.3714$

c) $\bar{u} = 100$ V U = 113.6 V $|\bar{u}| = 100.0$ V

$F_u = 1.136$ $g_u = 0.4402$ $d_u = 0.8979$

d) $\bar{u} = 200$ V U = 374.2 V $|\bar{u}| = 312.2$ V

$F_u = 1.198$ $g_u = 0.8018$ $d_u = 0.5976$

e) $\bar{u} = 0$ U = 32.02 V $|\bar{u}| = 24.91$ V

$F_u = 1.285$ $g_u = 0.9370$ $d_u = 0.3492$

Aufgabe 6.4.3

a) $\bar{y} = 0.4444$ Y = 0.5375 $|\bar{y}| = 0.4444$

b) $\bar{y} = 2.176$ Y = 2.421 $|\bar{y}| = 2.176$

c) $\bar{y} = 0$ Y = 1.155 $|\bar{y}| = 1.0$

d) $\bar{y} = 1.5$ Y = 1.633 $|\bar{y}| = 1.5$

Aufgabe 6.5.1

i(t) = 14.1 A*cos(314 t/s - 50°)

û = 141 V	U = 100 V	$\varphi_u = -50°$	$\underline{U}$ = 100 V $\angle -50°$
î = 14.1 A	I = 10 A	$\varphi_i = -50°$	$\underline{I}$ = 10 V $\angle -50°$
P = 1000 W	Q = 0	S = 1 kVA	$\underline{S}$ = 1 kVA $\angle 0°$
$\underline{Z}$ = 10 Ω	$\varphi = 0°$		

Aufgabe 6.5.2

u(t) = 125.6 V*cos(314 t/s + 70°)

î = 2 A	I = 1.41 A	$\varphi_i = -20°$	$\underline{I}$ = 1.41 A $\angle -20°$
û = 125.6 V	U = 88.8 V	$\varphi_u = 70°$	$\underline{U}$ = 126 V $\angle 70°$
P = 0	Q = 125 Var	S = 125 VA	$\underline{S}$ = 125 VA $\angle 90°$

$\underline{Z}$ = 62.8 Ω $\angle 90°$ $\varphi = 90°$

Aufgabe 6.5.3

i(t) = 0.177 A*cos(6280 t/s + 120°)

û = 14.1 V	U = 10 V	$\varphi_u = 30°$	$\underline{U}$ = 10 V $\angle 30°$
î = 0.177 A	I = 0.126 A	$\varphi_i = 120°$	$\underline{I}$ = 0.126 A $\angle 120°$
P = 0	Q = -1.26 Var	S = 1.26 VA	$\underline{S}$ = 1.26 VA $\angle -90°$
$\underline{Z}$ = 79.62 Ω $\angle -90°$	$\varphi = -90°$		

Aufgabe 6.5.4

P = 28.8 W Q = 45.3 Var

$u_R(t)$ = 75.9 V*cos(314 t/s - 57.52 °) $u_L(t)$ = 119 V*cos(314 t/s + 32.49 °)

i(t) = 0.759 A*cos(314 t/s - 57.52 °)

Aufgabe 6.5.5 $\underline{U}$ = 14.1 V $\angle -62.05°$

Aufgabe 6.5.6

a)	$\varphi = 50^\circ$	P = 6.42 W	Q = 7.66 Var	S = 10 VA
b)	$\varphi = -70^\circ$	P = 37.6 W	Q = -103 Var	S = 110 VA

Aufgabe 6.5.7

a) $\underline{I}$ = 2.2 A $\angle 0^\circ$ i(t) = 3.11 A*cos(ωt)

b) $\underline{I}$ = 1.1 A $\angle -90^\circ$ i(t) = 1.56 A*cos(ωt - 90°)

c) $\underline{I}$ = 0.88 A $\angle 90^\circ$ i(t) = 1.24 A*cos(ωt + 90°)

Aufgabe 6.5.8

a)

Zweig	V	phi	A	phi	VA	phi	Ω	phi
1	98.39	-63.43	1.97	-63.43	193.60	0.00	50.00	0.00
2	196.77	26.57	1.97	-63.43	387.20	90.00	100.00	90.00

Zweig	V	V	A	A	W	Var	Ω	Ω
1	44.00	-88.00	0.8800	-1.7600	193.60	0.00	50.00	0.00
2	176.00	88.00	0.8800	-1.7600	0.00	387.20	0.00	100.00

b)

Zweig	V	phi	A	phi	VA	phi	Ω	phi	
1	100.00	-90.00	5.00	0.00	500.00	270.00	20.00	270.00	
2	141.42	45.00	3.54	45.00	500.00	0.00	40.00	0.00	
3	141.42	45.00	3.54	-45.00	500.00		90.00	40.00	90.00

Zweig	V	V	A	A	W	Var	Ω	Ω
1	0.00	-100.00	5.0000	0.00	0.00	-500.00	0.00	-20.00
2	100.00	100.00	2.5000	2.50	500.00	0.00	40.00	0.00
3	100.00	100.00	2.5000	-2.50	0.00	500.00	0.00	40.00

c)

Zweig	V	phi	mA	phi	VA	phi	Ω	phi
1	13.461	-17.74	184.90	56.31	2.489	-74.05	72.80	-74.05
2	8.269	29.74	165.380	82.87	1.368	-53.13	50.00	-53.13
3	8.269	29.74	82.690	-7.13	0.684	36.87	100.00	36.87

Zweig	V	V	mA	mA	W	Var	Ω	Ω	
1	12.821	-4.103	102.56	153.85	0.683	-2.3932		20.00	-70.00
2	7.179	4.103	20.51	164.10	0.8205	-1.0940	30.00	-40.00	
3	7.179	4.103	82.05	-10.26	0.5470	0.4103	80.00	60.00	

Aufgabe 6.5.9

a)

Zweig	V	phi	mA	phi	mVA	phi	kΩ	phi
1	17.889	26.57	12.649	-18.43	226.274	45.00	1.414	45.00
2	8.944	-63.43	8.94	-63.43	80.000	0.00	1.000	0.00
3	8.944	-63.43	8.944	26.57	80.000	270.00	1.000	270.00

Zweig	V	V	mA	mA	mW	mVar	kΩ	kΩ
1	16.00	8.00	12.00	-4.00	160.00	160.00	1.000	1.000
2	4.00	-8.00	4.00	-8.00	80.00	0.00	1.000	0.000
3	4.00	-8.00	8.00	4.00	0.00	-80.00	0.000	-1.000

b)

Zweig	V	phi	mA	phi	mVA	phi	kΩ	phi
1	13.435	-3.12	9.500	41.88	127.624	-45.00	1.414	-45.00
2	6.626	6.34	4.685	51.34	31.044	-45.00	1.414	-45.00
3	4.939	32.91	4.939	32.91	24.390	-0.00	1.000	0.00
4	3.123	-38.66	3.123	51.34	9.756	-90.00	1.000	270.00
5	3.123	-38.66	2.209	6.34	6.899	-45.00	1.414	-45.00
Zweig	V	V	mA	mA	mW	mVar	kΩ	kΩ
1	13.415	-0.732	7.0732	6.3415	90.24	-90.24	1.00	-1.00
2	6.585	0.732	2.9268	3.6585	21.95	-21.95	1.00	-1.00
3	4.146	2.683	4.1463	2.6829	24.39	-0.00	1.00	0.00
4	2.439	-1.951	1.9512	2.4390	0.00	-9.76	0.00	-1.00

5	2.439	-1.951	2.1951	0.2439	4.88	-4.88	1.00	-1.00

Aufgabe 6.5.10 f = 918.9 Hz

Aufgabe 6.5.11 R = 60 Ω X = 191 Ω L = 0.607 H

Aufgabe 6.5.12 R = 13.33 kΩ L = 33.4 mH

Aufgabe 6.5.13 X = ± 80 Ω f_1 = 318 Hz f_2 = 194 Hz

Aufgabe 6.5.14
R_1 = 300 Ω Z_2 = 900 Ω R_2 = 166.7 Ω X_2 = 884.4 Ω

Aufgabe 6.6.1
a) $\underline{U}_1$ = 59.89 V /-6.19° b) $\underline{U}_1$ = 23.39 V /26.93°
c) $\underline{U}_1$ = 18.73 V /3.91° d) $\underline{U}_1$ = 14.55 V /-9.09°

Aufgabe 6.6.2
a) $\underline{I}_1$ = 4.097 A /9.066° b) $\underline{I}_1$ = 17.54 A /56.93°
c) $\underline{I}_1$ = 2.208 A /98.91° d) $\underline{I}_1$ = 39.39 A /-80.12°

Aufgabe 6.6.3
$R_x = \frac{R_1}{R_3} * R_4$ $C_x = \frac{R_3}{R_1} * C_4$ R_x = 20 MΩ C_x = 50 nF

Aufgabe 6.6.4
$R_x = \frac{R_1 * R_3}{R_2}$ $L_x = R_1 * R_3 * C_2$ R_x = 50 Ω L_x = 0.25 H

Aufgabe 6.6.5
P_1 = 50 W S_1 = 100 VA Q_1 = 86.60 Var
P_2 = 50 W S_2 = 55.56 VA Q_2 = 24.22 Var C = 4.10 µF

Aufgabe 6.6.6 C = 381 µF

Aufgabe 6.6.7
a) X = -20Ω R = 10 Ω P_{max} = 250 W
b) X = 20 Ω R = 10 Ω S_{max} = 112 VA

Aufgabe 6.6.8
a) R_p = 50 Ω X_p = 25 Ω
b) R_p = 125 Ω X_p = -166.7 Ω

Aufgabe 6.6.9
a) R_R = 17.2 Ω X_R = 6.90 Ω
b) R_R = 9.73 Ω X_R = -1.62 Ω

Aufgabe 6.7.1
a) $\underline{Z}$ = 20 Ω(1 + jω/ω$_e$) ω$_e$ = 2000 1/s $\underline{Y} = \frac{1}{20\,\Omega} * \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}$

$\underline{I} = 5\,A \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}$ $\underline{S} = 500\,VA * \frac{1}{1 - j\omega/\omega_e}$

$\underline{U}_R = 100\,V * \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}$ $\underline{U}_L = 100\,V \left[1 - \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}\right]$

b) ω$_e$ = 2000 1/s $\underline{U} = 10\,V - 5\,V \frac{1}{1 + j\omega/\omega_e}$

c) $\underline{U} = -\underline{U}_Q * e^{-j2\arctan(\omega RC)} = -10\,V * e^{j2\arctan(\omega/5000s^{-1})}$

Aufgabe 6.7.2

$$\underline{S} = 160\,MVA \frac{1}{\frac{R}{4\,m\Omega} - j}$$

Aufgabe 6.7.3 (siehe auch Arbeitsblatt EGII-17)

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 + (0.3820\ \omega RC)^2} * \sqrt{1 + (2.618\ \omega RC)^2}}$$

φ = -arctan(0.3820 ωRC) - artan(2.618 ωRC)

Aufgabe 6.7.4

a) $\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_E}$ $\omega_E = 300\ s^{-1}$

b) $\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega/\omega_E)^2}$ $\omega_E = 300\ s^{-1}$

c) (siehe auch Arbeitsblatt EGII-17)

$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega/\omega_{E1})\,(1 + j\omega/\omega_{E2})}$ $\omega_{E1} = 785\ s^{-1}$ $\omega_{E2} = 115\ s^{-1}$

d) $\underline{F}(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_E}{1 + j\omega/\omega_E}$ $\omega_E = 3000\ s^{-1}$

e) $\underline{F}(j\omega) = 0.1\frac{j\omega/\omega_E}{1 + j\omega/\omega_E}$ $\omega_E = 3000\ s^{-1}$

f) $\underline{F}(j\omega) = \frac{j(\omega/\omega_{E2})}{(1 + j\omega/\omega_{E1})\,(1 + j\omega/\omega_{E2})}$ $\omega_{E1} = 300\ s^{-1}$ $\omega_{E2} = 3000\ s^{-1}$

g) $\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{10}\frac{1 + j\omega/\omega_{E1}}{1 + j\omega/\omega_{E2}}$ $\omega_{E1} = 300\ s^{-1}$ $\omega_{E2} = 3000\ s^{-1}$

h) $\underline{F}(j\omega) = \frac{1 + j\omega/\omega_{E1}}{1 + j\omega/\omega_{E2}}$ $\omega_{E1} = 3000s^{-1}$ $\omega_{E2} = 300\ s^{-1}$

Aufgabe 6.7.5

a) $f_0 = 5.033$ kHz b) $f_0 = 159.2$ Hz

Aufgabe 6.7.6

a) $f_0 = 15.92$ kHz Q = 10
$f_1 = 15.14$ kHz $f_2 = 16.73$ kHz $\Delta f = 1.59$ kHz
$\underline{U}_R(f_0/2) = 0.665$ V $\underline{/86.19^\circ}$ $\underline{U}_R(f_1) = 7.071$ V $\underline{/45^\circ}$
$\underline{U}_R(f_0) = 10.0$ V $\underline{/0^\circ}$ $\underline{U}_R(f_2) = 7.071$ V $\underline{/-45^\circ}$
$\underline{U}_R(2*f_0) = 0.665$ V $\underline{/-86.19^\circ}$

b) $f_0 = 355.9$ kHz Q = 5
$f_1 = 322.1$ kHz $f_2 = 393.2$ kHz $\Delta f = 71.2$ kHz
$\underline{U}_R(f_0/2) = 1.322$ V $\underline{/82.41^\circ}$ $\underline{U}_R(f_1) = 7.071$ V $\underline{/45^\circ}$
$\underline{U}_R(f_0) = 10.0$ V $\underline{/0^\circ}$ $\underline{U}_R(f_2) = 7.071$ V $\underline{/-45^\circ}$
$\underline{U}_R(2*f_0) = 1.322$ V $\underline{/-82.41^\circ}$

Aufgabe 6.7.7

a) f_0 = 15.92 kHz Q = 10
f_1 = 15.14 kHz f_2 = 16.73 kHz Δf = 1.6 kHz
$\underline{U}_R(f_0/2)$ = 1.33 V /86.19° $\underline{U}_R(f_1)$ = 14.142 V /45°
$\underline{U}_R(f_0)$ = 20.0 V /0° $\underline{U}_R(f_2)$ = 14.142 V /-45°
$\underline{U}_R(2*f_0)$ = 1.33 V /-86.19°

b) f_0 = 355.9 kHz Q = 5
f_1 = 322.1 kHz f_2 = 393.2 kHz Δf = 71.2 kHz
$\underline{U}_R(f_0/2)$ = 2.955 V /82.41° $\underline{U}_R(f_1)$ = 15.811 V /45°
$\underline{U}_R(f_0)$ = 22.36 V /0° $\underline{U}_R(f_2)$ = 15.811 V /-45°
$\underline{U}_R(2*f_0)$ = 2.955 V /-82.41°

Netzwerk 6.8A

Zweig	V	phi	A	phi	VA	phi	Ω	phi
1	34.1	-39.39	1.5	257.17	52.1	63.43	22.4	63.43
2	76.7	16.39	1.3	47.35	101.0	-30.96	58.3	-30.96
3	122.9	126.82	2.7	63.39	337.5	63.43	44.7	63.43

Zweig	V	V	A	A	W	Var	Ω	Ω
1	26.4	-21.7	-0.3389	-1.4879	23.3	46.6	10.00	20.00
2	73.6	21.7	0.8917	0.9682	86.6	-52.	50.00	-30.00
3	-73.6	98.3	1.2306	2.4561	150.9	301.9	20.00	40.00

Netzwerk 6.8B

Zweig	V	phi	A	phi	VA	phi	Ω	phi
1	65.99	-3.09	2.95	-66.52	194.77	63.43	22.36	63.43
2	34.29	5.95	3.07	-57.49	105.14	63.43	11.18	63.43
3	51.84	243.19	0.49	194.37	25.28	48.81	106.30	48.81
4	76.07	40.91	5.03	-41.49	382.41	82.41	15.13	82.41
5	76.67	19.17	5.32	-37.14	407.57	56.31	14.42	56.31

Zweig	V	V	A	A	W	Var	Ω	Ω
1	65.90	-3.55	1.1759	-2.7070	87.1	174.2	10.00	20.00
2	34.10	3.55	1.6483	-2.5860	47.0	94.0	5.00	10.00
3	-23.39	-46.27	-0.4724	-0.1210	16.6	19.0	70.00	80.00
4	57.49	49.82	3.7654	-3.3305	50.5	379.1	2.00	15.00
5	72.42	25.18	4.2379	-3.2094	226.1	339.1	8.00	12.00

Netzwerk 6.8C

Zweig	V	phi	A	phi	VA	phi	Ω	phi
1							14.1	45.00
2	13.3	98.49	3.0	35.05	39.5	63.43	4.5	63.43
3	105.0	25.65	1.1	-27.48	110.4	53.13	100.0	53.13
4	17.8	172.16	2.7	235.60	47.3	-63.43	6.7	-63.43
5							20.0	60.00

Zweig	V	V	A	A	W	Var	Ω	Ω
1							10.00	10.00
2	-2.0	13.1	2.4324	1.7064	17.7	35.3	2.00	4.00
3	94.7	45.5	0.9320	-0.4848	66.2	88.3	60.00	80.00
4	-17.6	2.4	-1.5004	-2.1911	21.2	-42.3	3.00	-6.00
5							10.00	17.32

Netzwerk 6.8D

Zweig	V	phi	A	phi	kVA	phi	Ω	phi
1	49.2	136.05	4.8	57.36	0.2	78.69	10.2	78.69
2	139.6	-14.14	1.4	-14.14	0.2	-0.00	100.0	0.00
3	228.7	-15.81	4.6	74.19	1.0	-90.00	50.0	270.00
4			7.8	88.57			10.0	0.00
5	178.8	17.08	3.6	107.08	0.6	-90.00	50.0	270.00
6	118.1	43.10	0.6	43.10	0.1	-0.00	200.0	0.00
7	36.7	170.77	3.9	99.20	0.1	71.57	9.5	71.57
Zweig	V	V	A	A	kW	kVar	Ω	Ω
1	-35.4	34.1	2.6001	4.0596	0.046	0.232	2.00	10.00
2	135.4	-34.1	1.3540	-0.3412	0.195	-0.000	100.00	0.00
3	220.0	-62.3	1.2462	4.4008	0.000	-1.046	0.00	-50.00
4			0.1957	7.8188			10.00	0.00
5	170.9	52.5	-1.0505	3.4179	0.000	-0.639	0.00	-50.00
6	86.3	80.7	0.4313	0.4036	0.070	-0.000	200.00	0.00
7	-36.3	5.9	-0.6192	3.8215	0.045	0.135	3.00	9.00

Aufgabe 6.8.1

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 & -6 \\ 7 & 2 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \\ -8 & -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^{re} \\ z_2^{re} \\ z_1^{im} \\ z_2^{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -7 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 7 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & -3 & -4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^{re} \\ z_2^{re} \\ z_3^{re} \\ z_1^{im} \\ z_2^{im} \\ z_3^{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.9.1

a) $\underline{I}_1 = 6.9378\ A\ \angle -71.57^\circ$ $S_1 = S_2 = S_3 = 1.5221$ kVA
$\underline{I}_2 = 6.9378\ A\ \angle 168.43^\circ$ $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1.444$ kVar
$\underline{I}_3 = 6.9378\ A\ \angle 48.43^\circ$ $P_1 = P_2 = P_3 = 0.4813$ kW
$I_0 = 0.0000$ A

b) $\underline{I}_1 = 21.939\ A\ \angle 36.87^\circ$ $S_1 = S_2 = S_3 = 4.8133$ kVA
$\underline{I}_2 = 21.939\ A\ \angle -83.13^\circ$ $Q_1 = Q_2 = Q_3 = -2.8880$ kVar
$\underline{I}_3 = 21.939\ A\ \angle 156.87^\circ$ $P_1 = P_2 = P_3 = 3.8507$ kW
$I_0 = 0.0000$ A

Aufgabe 6.9.2

a) $\underline{I}_1 = 98.116\ A\ \angle -26.57^\circ$ $S_1 = S_2 = S_3 = 21.526$ kVA
$\underline{I}_2 = 98.116\ A\ \angle 213.43^\circ$ $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 9.627$ kVar
$\underline{I}_3 = 98.116\ A\ \angle 93.43^\circ$ $P_1 = P_2 = P_3 = 19.253$ kW

b) $\underline{I}_1 = 981.16\ A\ \angle -26.57^\circ$ $S_1 = S_2 = S_3 = 215.26$ KVA
$\underline{I}_2 = 981.16\ A\ \angle 213.43^\circ$ $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 96.27$ kVar
$\underline{I}_3 = 981.16\ A\ \angle 93.43^\circ$ $P_1 = P_2 = P_3 = 192.53$ kW

Aufgabe 6.9.3

a) $\underline{I}_1 = 20.813\ A\ \angle -71.56^\circ$ $S_{12} = S_{23} = S_{31} = 4.5663$ kVA
$\underline{I}_2 = 20.813\ A\ \angle 168.44^\circ$ $Q_{12} = Q_{23} = Q_{31} = 4.3320$ kVar
$\underline{I}_3 = 20.813\ A\ \angle 48.44^\circ$ $P_{12} = P_{23} = P_{31} = 1.4440$ kW
$\underline{I}_{12} = 12.017\ A\ \angle -41.56^\circ$
$\underline{I}_{23} = 12.017\ A\ \angle 198.44^\circ$
$\underline{I}_{31} = 12.017\ A\ \angle 78.44^\circ$

b) $\underline{I}_1 = 65.818\ A\ \angle 36.87^\circ$ $S_{12} = S_{23} = S_{31} = 14.440$ kVA
$\underline{I}_2 = 65.818\ A\ \angle -83.13^\circ$ $Q_{12} = Q_{23} = Q_{31} = -8.664$ kVar
$\underline{I}_3 = 65.818\ A\ \angle 156.87^\circ$ $P_{12} = P_{23} = P_{31} = 11.552$ kW
$\underline{I}_{12} = 38.00\ A\ \angle 66.87^\circ$

$\underline{I}_{23} = 38.00\ A\ \angle -53.13^\circ$
$\underline{I}_{31} = 38.00\ A\ \angle 186.87^\circ$

Aufgabe 6.9.4

a) $\underline{I}_1 = 10.353\ A\ \angle -45^\circ$ $S_{12} = S_{23} = S_{31} = 7.60\ kVA$
$\underline{I}_2 = 10.353\ A\ \angle -75^\circ$
$\underline{I}_3 = 20.0\ A\ \angle 120^\circ$
$\underline{I}_{12} = 20.0\ A\ \angle 30^\circ$
$\underline{I}_{23} = 20.0\ A\ \angle 0^\circ$
$\underline{I}_{31} = 20.0\ A\ \angle 60^\circ$

$Q_{12} = 0\ kVar$ $Q_{23} = -7.60\ kVar$ $Q_{31} = 7.60\ kVar$
$P_{12} = 7.60\ kW$ $P_{23} = 0\ kW$ $P_{31} = 0\ kW$

b) $\underline{I}_1 = 125.67\ A\ \angle 10.89^\circ$ $S_{12} = 36.1\ kVA$
$\underline{I}_2 = 138.03\ A\ \angle 233.41^\circ$ $S_{23} = 24.066\ kVA$
$\underline{I}_3 = 96.31\ A\ \angle 115.29^\circ$ $S_{31} = 18.050\ kVA$
$\underline{I}_{12} = 95.0\ A\ \angle 30^\circ$
$\underline{I}_{23} = 63.33\ A\ \angle -90^\circ$
$\underline{I}_{31} = 47.50\ A\ \angle 150^\circ$

$Q_{12} = Q_{23} = Q_{31} = 0\ kVar$
$P_{12} = 36.100\ kW$ $P_{23} = 24.066\ kW$ $P_{31} = 18.050\ kW$

Aufgabe 6.9.5

a) $\underline{I}_1 = 11.547\ A\ \angle 0^\circ$ $S_1 = S_2 = S_3 = 2.5333\ kVA$
$\underline{I}_2 = 11.547\ A\ \angle -30^\circ$
$\underline{I}_3 = 11.547\ A\ \angle 30^\circ$
$\underline{I}_0 = 31.547\ A\ \angle 0^\circ$

$Q_1 = 0\ kVar$ $Q_2 = -2.5334\ kVar$ $Q_3 = 2.5334\ kVar$
$P_1 = 2.5333\ kW$ $P_2 = 0\ kW$ $P_3 = 0\ kW$

b) $\underline{I}_1 = 54.848\ A\ \angle 0^\circ$ $S_1 = 12.033\ kVA$
$\underline{I}_2 = 36.566\ A\ \angle 240^\circ$ $S_2 = 8.022\ kVA$
$\underline{I}_3 = 27.424\ A\ \angle 120^\circ$ $S_3 = 6.017\ kVA$
$\underline{I}_0 = 24.186\ A\ \angle -19.11^\circ$

$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0\ kVar$
$P_1 = 12.033\ kW$ $P_2 = 8.022\ kW$ $P_3 = 6.017\ kW$

Aufgabe 6.9.6

a) $\underline{U}_{z1} = 150.58\ V\ \angle 6.59^\circ$
$\underline{U}_{z2} = 249.11\ V\ \angle 223.9^\circ$
$\underline{U}_{z3} = 274.20\ V\ \angle 130.89^\circ$

$\underline{I}_1 = 15.058\ A\ \angle 6.59^\circ$ $S_1 = 2.2674\ kVA$
$\underline{I}_2 = 12.456\ A\ \angle 223.9^\circ$ $S_2 = 3.1028\ kVA$
$\underline{I}_3 = 9.140\ A\ \angle 130.89^\circ$ $S_3 = 2.5061\ kVA$

$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0\ kVar$
$P_1 = 2.2674\ kW$ $P_2 = 3.1028\ kW$ $P_3 = 2.5061\ kW$

b) $\underline{U}_{z1} = 274.20\ V\ \angle -10.89^\circ$
$\underline{U}_{z2} = 249.11\ V\ \angle 256.1^\circ$
$\underline{U}_{z3} = 150.58\ V\ \angle 113.41^\circ$

$\underline{I}_1 = 9.140\ A\ \angle -10.89^\circ$ $S_1 = 2.5061\ kVA$
$\underline{I}_2 = 12.456\ A\ \angle 256.1^\circ$ $S_2 = 3.1028\ kVA$
$\underline{I}_3 = 15.058\ A\ \angle 113.41^\circ$ $S_3 = 2.2674\ kVA$

$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$ kVar
$P_1 = 2.5061$ kW $P_2 = 3.1028$ kW $P_3 = 2.2674$ kW

Aufgabe 6.9.7

a) $\underline{I}_1 = 4.0166$ A $\angle -71.57°$ $S_1 = S_2 = S_3 = 510.18$ VA
$\underline{I}_2 = 4.0166$ A $\angle 168.43°$ $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 484.0$ Var
$\underline{I}_3 = 4.0166$ A $\angle 48.43°$ $P_1 = P_2 = P_3 = 161.33$ W

b) $\underline{I}_1 = 12.702$ A $\angle 36.87°$ $S_1 = S_2 = S_3 = 1.6133$ kVA
$\underline{I}_2 = 12.702$ A $\angle -83.13°$ $Q_1 = Q_2 = Q_3 = -0.9680$ kVar
$\underline{I}_3 = 12.702$ A $\angle 156.87°$ $P_1 = P_2 = P_3 = 1.2907$ kW

Aufgabe 6.9.8

a) $\underline{I}_1 = 10.381$ A $\angle -45°$ $S_{12} = S_{23} = S_{31} = 7.6421$ kVA
$\underline{I}_2 = 10.381$ A $\angle -75°$
$\underline{I}_3 = 20.055$ A $\angle 120°$
$\underline{I}_{12} = 20.055$ A $\angle 30°$
$\underline{I}_{23} = 20.055$ A $\angle 0°$
$\underline{I}_{31} = 20.055$ A $\angle 60°$

$Q_{12} = 0$ kVar $Q_{23} = -7.6421$ kVar $Q_{31} = 7.6421$ kVar
$P_{12} = 7.6421$ kW $P_{23} = 0$ kW $P_{31} = 0$ kW

b) $\underline{I}_1 = 126.02$ A $\angle 10.89°$ $S_{12} = 36.300$ kVA
$\underline{I}_2 = 138.41$ A $\angle 233.41°$ $S_{23} = 24.200$ kVA
$\underline{I}_3 = 96.58$ A $\angle 115.29°$ $S_{31} = 18.150$ kVA
$\underline{I}_{12} = 95.26$ A $\angle 30°$
$\underline{I}_{23} = 63.51$ A $\angle -90°$
$\underline{I}_{31} = 47.63$ A $\angle 150°$

$Q_{12} = Q_{23} = Q_{31} = 0$ kVar
$P_{12} = 36.300$ kW $P_{23} = 24.200$ kW $P_{31} = 18.150$ kW

Aufgabe 6.9.9

a) P = 60 kW Q = 34.64 kVar
S = 69.28 kVA I = 105.3 A

b) P = 70 kW Q = 86.6 kVar
S = 111.4 kVA I = 169.2 A

Aufgabe 6.9.10

Zweig	V	phi	A	phi	kVA	phi	Ω	phi
1	219.39	-0.00	21.939	-0.00	4.8133	0.00	10.000	0.00
2	219.39	240.00	13.876	168.43	3.0442	71.57	15.811	71.57
3	219.39	120.00	7.757	165.00	1.7018	-45.00	28.284	-45.00
4	0.00	79.90	4.865	79.90	0.0000	0.00	0.000	0.00

Aufgabe 6.9.11

Zweig	V	phi	A	phi	kVA	phi	Ω	phi
1	223.75	-8.37	22.375	-8.37	5.0064	-0.00	10.000	0.00
2	247.25	244.17	15.638	172.61	3.8664	71.57	15.811	71.57
3	190.77	124.38	6.745	169.38	1.2867	-45.00	28.284	-45.00

Aufgabe 7.1

a) $R = 0.5123\ \Omega$ c) $E_r = 6.213\ V*r^{-1}$

d) $\varphi = 10\,V + 6.213\,V \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$ e) $\frac{P}{V} = 1931\frac{W}{m} * \frac{1}{r^2}$

f) P = 195.3 W

Aufgabe 7.2

a) R = 31.83 Ω b) U = 3.183 kV

c) $J_r = 15.92\,A\frac{1}{r^2}$ $E_r = 1592\,Vm\frac{1}{r^2}$

d) $\varphi = 1592\,Vm\frac{1}{r}$ e) $\frac{P}{V} = 25.34\,kWm\frac{1}{r^4}$

f) P = 318.3 kW

Aufgabe 8.1

a) C = 5 µF b) C = 0.8 µF

Aufgabe 8.2

C = 20.26 nF X = -78.58 Ω I = 1.273 A

g) gleiche Ströme wie bei f

Aufgabe 8.4 F = -3.951 -10^{-5} VAS/m F = $-3.951*10^{-5}$ N

Aufgabe 8.5 F = $5*10^{-4}$ N

Aufgabe 8.6

a) C = 11.953 nF b) R = $3.3333*10^{10}$ Ω c) T = 398.43 s

d) Q = $11.953*10^{-6}$ As e) W = 5.975 mW f) t = 114.6 s

Aufgabe 8.7 C = 0.4427 nF P_v = 1.391 W

Aufgabe 8.8

a) $u_1(t=0)$ = 66.67 V $u_2(t=0)$ = 33.33 V

b) $u_1(t\to\infty)$ = 16.66 V $u_2(t\to\infty)$ = 83.33 V

Aufgabe 8.9

a) C = 74.18 pF b) Q = $74.178*10^{-6}$ As

c) $D_r(r) = \frac{5.903*10^{-6}As}{r^2}$ $E_r(r) = \frac{666.7\ kVm}{r^2}$

d) $\varphi = 666.7\ kVm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)$ e) $dW = 24.72\ \frac{AsVm}{r^2}*dr$

f) W = 37.09 Ws g) W = 1/2 C*U^2

h) E_{max} = 26.67 kV/cm

Aufgabe 8.10 F = $2.214*10^{-2}$ N